

Palautetaan viimeistään maanantaina 12.12. klo 12.15

1. Laske funktion $\frac{1}{r^a}$ ($a > 0$) kolmiulotteinen Fourier-muunnos, so.

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{r^a}\right](\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint dx dy dz \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r^a}$$

missä $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_1x + k_2y + k_3z$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Laske myös funktion $\frac{1}{r^a}$ kolmiulotteinen Fourier'n integraali, ts. Fourier'n käänteismuunnos. Millä parametrien a arvoilla Fourier-muunnoksen ja käänteismuunnoksen epäoleelliset integraalit suppenevat? Rajalla $a \rightarrow 1$ tästä saadaan (muodollisesti) Coulombin potentiaalin (tai Newtonin gravitaatiopotentiaalin) Fourier-muunnos. Onko rajankäynti laillinen Fourier-muunnoksessa tai käänteismuunnoksessa?

2. Laske funktion

$$f(t) = \sinh 2t + 3t^3 \cos t + t + 2$$

Laplace-muunnos.

3. Laske funktion $f(t)$ Laplacen muunnos, kun

$$f(t) = \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{2}} \tau^2 d\tau.$$

4. Laske T -jaksollisen funktion $f(t)$ Laplace-muunnos, kun

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2ht}{T}, & 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ 0, & \frac{T}{2} \leq t < T. \end{cases}$$

5. Laske funktion $F(s)$ originaali (ts. Laplacen käänteismuunnos), kun

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{2s e^{-s}}{s^2 - 4}.$$