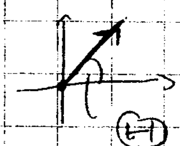
Nyt saadaan siis

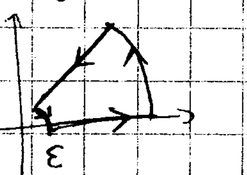
$$\int_{\uparrow} z^{\alpha-1} e^{-z}\,dz = \int_{\rightarrow} z^{\alpha-1} e^{-z}\,dz = \Gamma(\alpha).$$

Esim. $\int z^{\alpha-1} e^{-z}\,dz$



Aluksi $\oint z^{\alpha-1} e^{-z}\,dz = 0$

Huom. Tajusin juuri että olen aikaisemmin unohtanut käsitellä tuon pienen kaaren!



(kulma Θ)

$$= \int + \int + \int + \int .$$

Kaaret: i) $\left| \int z^{\alpha-1} e^{-z}\,dz \right|$

(kuten aiemmin) $\underset{z=Re^{i\varphi}}{\leq} \int_0^{\Theta} d\varphi\, R^{\alpha} \underbrace{e^{-R\cos\varphi}}_{\leq e^{-R\cos\Theta}}$, $\cos\varphi \geq \cos\Theta$ kun $\varphi \in [0, \Theta]$ (kuten kuvassa, oletetaan $\Theta < \frac{\pi}{2}$)

$$\leq \frac{R^{\alpha}}{e^{R\cos\Theta}} \int_0^{\Theta} d\varphi = \frac{\Theta R^{\alpha}}{e^{R\cos\Theta}} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

kunhan $\cos\Theta > 0$ (mikä oletettiin).
(huom. nyt α ei vaikuta)

ii) Samoin kuin suuri kaari,

$$\left| \int_{\varepsilon} z^{\alpha-1} e^{-z}\,dz \right| \leq \frac{\Theta\, \varepsilon^{\alpha}}{\underbrace{e^{\varepsilon\cos\Theta}}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 1}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0,$$

kunhan $\alpha > 0$.

Tällöin siis $\int_{\nearrow} z^{\alpha-1} e^{-z}\,dz = \int_{\rightarrow} z^{\alpha-1} e^{-z}\,dz = \Gamma(\alpha).$