$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) f_k z^{k+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+r) p_n + q_n \right] f_k z^{k+n+r} = 0$$

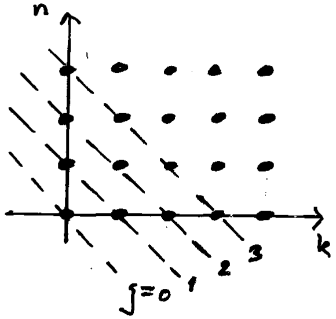
(KAHDEN POTENSSISARJAN TULO:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_k b_n z^{k+n}$$

JÄRJESTETÄÄN TERMIT UUDESTAAN:

OLKOON $j = k+n$, SUMMATAAN j JA n:n YLI

$(k = j-n)$



$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_k b_n z^{k+n} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{j} a_{j-n} b_n\right) z^j$$

)

$\Rightarrow$ SAADAAN

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ (j+r)(j+r-1) f_j + \sum_{n=0}^{j} \left[(j-n+r) p_n + q_n \right] f_{j-n} \right\} z^{j+r} = 0$$

TOTEUTUU JOSS $\{ \} = 0$ ELI

$$(j+r)(j+r-1) f_j + \sum_{n=0}^{j} \left[(j-n+r) p_n + q_n \right] f_{j-n} = 0$$

$$(j+r)(j+r-1) f_j + \sum_{n=0}^{j} \left[(j-n+r) p_n + q_n \right] f_{j-n} = 0$$

KUN $j = 0$ SAADAAN

$$\left[r(r-1) + r p_0 + q_0 \right] f_0 = \left(r^2 + (p_0-1) r + q_0 \right) f_0 = 0$$

$\neq 0$ OL. MUKAAN

$\Rightarrow$ KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ

ELI INDEKSIYHTÄLÖ

$$r^2 + (p_0 - 1) r + q_0 = 0$$

JUURET

$$r_1 = -\tfrac{1}{2}(p_0 - 1) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(p_0-1)^2 - q_0}$$

$$r_2 = -\tfrac{1}{2}(p_0 - 1) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(p_0-1)^2 - q_0}$$

(SOVITAAN: $\sqrt{R} > 0$ $R>0$, $\mathrm{Im}\sqrt{R} > 0$, $R<0$)

$f_0 \neq 0$ VALITAAN MIELIV. (JOS $f(z)$ RATKAISEE YHTÄLÖN $f'' + Pf' + Qf = 0$, SAMOIN TEKEE $Cf(z)$, C VAKIO). VALITAAN $r = r_1$ TAI $= r_2$

MUUT KERTOIMET SAADAAN <u>REKURSIOKAAVASTA</u> (PALAUTUSKAAVASTA)

$$\left[(j+r)(j+r-1) + (j+r) p_0 + q_0 \right] f_j \equiv F(j+r) f_j = - \sum_{n=1}^{j} \left[(j-n+r) p_n + q_n \right] f_{j-n} \qquad (R)$$

MISSÄ $F(x) = x(x-1) + p_0 x + q_0$

INDEKSIYHTÄLÖ: $F(r) = 0$

REKURSIORELAATIO (R) MÄÄRÄÄ KERTOIMEN f_j KUNHAN $F(j+r) \neq 0$

ONKO TÄMÄ TAATTU ?

KIRJOITETAAN $F(j+r)$ TOISEEN MUOTOON ($r = r_1$ TAI r_2)

$$F(j+r) = (j+r)(j+r-1) + p_0(j+r) + q_0$$

$$= \underbrace{r(r-1) + p_0 r + q_0}_{=F(r)=0} + j(2r-1) + p_0 j + j^2$$

$$= j(j + 2r + p_0 - 1)$$

JOS NYT $r = r_1 = -\frac{1}{2}(p_0 - 1) + \sqrt{\frac{1}{4}(p_0-1)^2 - q_0}$

$2r_1 + p_0 - 1 = 2\sqrt{}$ $(= r_1 - r_2)$, ELI

$j(j + 2r_1 + p_0 - 1) = j(j + 2\sqrt{}) \neq 0 \quad j = 1, 2, \ldots$

$F(j+r_1)$ ON SIIS $\neq 0$ KUN $j = 1, 2, 3, \ldots$,

SAAMME SIIS <u>AINA</u> YHDEN SARJARATKAISUN

$$f_1(z) = f_{r=r_1}(z)$$

ENTÄS KUN $r = r_2$?

$$F(j+r_2) = j(j + 2r_2 + p_0 - 1) = j(j - 2\sqrt{})$$

$$= j(j - (r_1 - r_2))$$

$$F(j+r_2) = j(j - (r_1 - r_2))$$

JOS $S = r_1 - r_2 \neq$ KOKONAISLUKU ,
$F(j+r_2)$ MYÖS $\neq 0$, $j = 1, 2, \ldots$

JA MENETELMÄ TUOTTAA TOISEN LIN. RIIPPUMATTOMAN RATKAISUN

$$f_2(z) = f_{r=r_2}(z)$$

YLEINEN RATKAISU : $f(z) = C_1 f_1(z) + C_2 f_2(z)$

<u>TAPAUS $s = 1, 2, \ldots$</u>

REKURSIOKAAVA (R) ON , KUN $j = s$

$$F(s+r_2) f_s = 0 = -\sum_{n=1}^{s} \left[(s-n+r_2)p_n + q_n\right] f_{s-n}$$

(A) <u>JOS</u> $\sum_{n=1}^{s} [(\underbrace{s+r_2}_{r_1} - n)p_n + q_n] f_{s-n} = 0$

TÄMÄ ON OK , JA f_s VOIDAAN VALITA MIELIVALTAISESTI. (R) ANTAA SITTEN $f_{s+1}, f_{s+2}, \ldots$

$r = r_2$ ANTAA SIIS RATKAISUN , JOKA SISÄLTÄÄ <u>KAKSI</u> MIELIV. VAKIOTA : $f_0^{(r=r_2)}$ JA $f_s^{(r=r_2)}$
VOIMME MUODOSTAA KAKSI RIIPPUMATONTA RATKAISUA $g_1(z)$ ($f_0 \neq 0, f_s = 0$) , $g_2(z)$ ($f_0 = 0$, $f_s \neq 0$). OSOITTAUTUU ETTÄ RATKAISU $f_1 = f^{(r=r_1)}$ ON $\propto g_2$

TÄMÄ TAPAHTUU, KUN ETSITÄÄN **RATKAISUA SÄÄNNÖLLISEN PISTEEN YMPÄRISTÖSSÄ** :

$P(z)$, $Q(z)$ SÄÄNNÖLLISIÄ $z=0$:SSA

$\Rightarrow \quad p_0 = q_0 = q_1 = 0$

INDEKSIYHTÄLÖ $\quad r(r-1) = 0$

$\Rightarrow r_1 = 1 \quad r_2 = 0$

TARKASTELLAAN ENSIN $r = 0$.

(R).

$$j(j-1) f_j = -\sum_{n=1}^{j} \left[(j-n) p_n + q_n \right] f_{j-n} \qquad \text{(R2)}$$

KUN $j = 1$ TÄMÄ ON $\quad 0 = [(1-1)p_1 + q_1] f_0 = 0$,

IDENTITEETTI

VOIMME SIIS VALITA $f_0 = f(0)$ JA $f_1 = f'(0)$ MIELIVALTAISESTI (DY:N ALKUARVOT !)

LASKEMALLA (R2):STA MUUTAMAT ENSIMMÄISET SAADAAN

$$f_2(z) = f^{(r=0)}(z) = f_0 + f_1 z \underbrace{- \tfrac{1}{2}(p_1 f_1 + q_2 f_0)}_{f_2} z^2$$
$$- \tfrac{1}{6}\left[2 p_1 f_2 + (p_2 + q_2) f_1 + q_3 f_0 \right] z^3$$

$[\;] = f_3$

$$- \tfrac{1}{12}\left[3 p_1 f_3 + (2p_2 + q_2) f_2 + (p_3 + q_3) f_1 + q_4 f_0 \right] z^4$$
$$+ \cdots$$

SIIRRYTÄÄN TAPAUKSEEN $r = r_1 = 1$, MERKITÄÄN

$$f_1(z) = f^{(r=1)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j \, z^{j+1}$$

$$j(j+1) g_j = -\sum_{n=1}^{j} \left[(j-n+1) p_n + q_n \right] g_{j-n}$$

SAADAAN

$$f_1(z) = g_0 z \underbrace{- \tfrac{1}{2} p_1 g_0}_{g_1} z^2 \underbrace{- \tfrac{1}{6}\left[2 p_1 g_1 + (p_2 + q_2) g_0 \right]}_{g_2} z^3$$
$$- \tfrac{1}{12}\left(3 p_1 g_2 + (2p_2 + q_2) g_1 + (p_3 + q_3) g_0 \right) z^4$$
$$+ \cdots$$

VRT. $\quad f_2(z) = f_0 + f_1 z - \tfrac{1}{2}(p_1 f_1 + q_2 f_0) z^2$

$$- \tfrac{1}{6}\left[2 p_1 f_2 + (p_2 + q_2) f_1 + q_3 f_0 \right] z^3$$
$$- \tfrac{1}{12}\left[3 p_1 f_3 + (2p_2 + q_2) f_2 + (p_3 + q_3) f_1 + q_4 f_0 \right] z^4 + \cdots$$

$f_1(z)$ ON SIIS $f_2(z)$ VALINNALLA $f_0 = 0$,

$$g_j = f_{j+1} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \; !$$

$r = r_2 = 0$ ANTAA SIIS YLEISEN RATKAISUN

(B.) TAPAUS $s = r_1 - r_2 = 1, 2, 3, \ldots$ MUTTA

$$\sum_{n=1}^{s} \left[(s-n+r_2) p_n + q_n \right] f_{s-n} \neq 0$$

POTENSSISARJAYRITE ANTAA VAIN YHDEN RATKAISUN $f_1(z) = f^{(r=r_1)}(z)$

TOISEN RATKAISUN MUOTO SAADAAN KAAVASTA

$$f_2(z) = f_1(z) \int^{z} du \, \frac{e^{-\int^{u} dv \, P(v)}}{f_1^2(u)}$$

$$f_1(z) = z^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \equiv z^{r_1} \omega(z)$$

KOSKA $f_0 \neq 0$ LÖYTYY $\varepsilon > 0$ S.E. $\omega(z) \neq C$ KUN $|z| < \varepsilon$ JA SIIS $f_1(z) = 0$ AINOASTAAN MAHDOLLISESTI $z = 0$:SSA (JOS $r_1 > 0$) KUN $|z| < \varepsilon$

VALITAAN INTEGROIMISTIE JOKA VÄLTTÄÄ ORIGOA

$$P(v) = \frac{p_0}{v} + \sum_{n=1}^{\infty} p_n v^{n-1}$$

$$\int^{u} dv \, P(v) = p_0 \log u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_n u^n + C$$

$$\Rightarrow f_2(z) = e^{-C} f_1(z) \int^{z} du \, u^{-2r_1-p_0} \frac{e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_n u^n}}{\omega^2(u)}$$

(e^{-C}:) EPÄOLEELLINEN

ANALYYTTINEN $|u| < \varepsilon$:SSÄ

$$\frac{e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p_n u^n}}{\omega^2(u)} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n u^n$$

$$g_0 = \frac{1}{\omega^2(0)} = \frac{1}{f_0^2} \neq 0$$

HUOMATAAN $p_0 + 2r_1 = p_0 - (p_0 - 1) + 2\sqrt{} = 1 + r_1 - r_2$
$= 1 + s$

$$\Rightarrow f_2(z) = f_1(z) \int^{z} du \, u^{-s-1} \sum_{n=0}^{\infty} g_n u^n$$

$$= f_1(z) \left(g_s \log z + \sum_{n \neq s} g_n \frac{z^{n-s}}{n-s} + C \right)$$

(C:) EPÄOLEELLINEN

$$= g_s f_1(z) \log z + z^{\overbrace{r_1 - s}^{= r_2}} \omega(z) \sum_{n \neq s} \frac{g_n}{n-s} z^n$$

TOINEN LIN. RIIPPUMATON RATKAISU ON SIIS

$$f_2(z) = f_1(z) \log z + \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{n+r_2}$$

($g_s \neq 0$, KOSKA PELKKÄ POTENSSISARJA MAHDOTON)

TAPAUS $r = r_1 = r_2$ ELI $s = 0$

TÄMÄ MENEE KUTEN B.

$r = r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}(p_0 - 1)$ ANTAA RATKAISUN

$$f_1(z) = z^r \omega(z) \quad , \ \omega(0) = f_0 \neq 0$$

TOINEN SAADAAN TAAS KAAVASTA

$$f_2(z) = f_1(z) \int^z du \ u^{\overbrace{-2r-p_0}^{=-1}} \frac{e^{-\sum_1^\infty \frac{p_n}{n} u^n}}{\omega^2(u)} \qquad \frac{e^{-\sum_1^\infty \frac{p_n}{n} u^n}}{\omega^2(u)} = \sum_{n=0}^\infty g_n u^n$$

$$= f_1(z)\left(g_0 \operatorname{Log} z + \sum_{n=1}^\infty \frac{g_n}{n} z^n\right) \qquad g_0 = \frac{1}{f_0^2} \neq 0$$

TOINEN RATKAISU ON SIIS TAAS MUOTOA

$$f_2(z) = f_1(z) \operatorname{Log} z + \sum_{n=0}^\infty h_n z^{n+r+1}$$

<u>YHTEENVETO</u> $f'' + Pf' + Qf = 0$

$$P(z) = (z-z_0)^{-1} \sum_0^\infty p_n (z-z_0)^n \qquad Q(z) = (z-z_0)^{-2} \sum_0^\infty q_n (z-z_0)^n$$

r_1, r_2 INDEKSIYHTÄLÖN $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ RATKAISUT

$r_1 - r_2 \neq$ KOK.LUKU $\quad f_1(z) = \sum_n f_n^{(1)} (z-z_0)^{n+r_1}$, $\quad f_2(z) = \sum_n f_n^{(2)} (z-z_0)^{n+r_2}$ LIN. RIIPPUMATTOMAT RATK.

$r_1 - r_2 = 0, 1, 2, \ldots \quad (r_1 > r_2)$

[illegible] $f^{r=r_2}(z)$ YL. RATK. (SIS KAKSI MIELIV. VAK.)

TAI $f_1(z) = f^{(r=r_1)}(z) = \sum_n f_n (z-z_0)^{n+r_1}$

([illegible]) $f_2(z) = f_1(z) \operatorname{Log}(z-z_0) + \sum h_n (z-z_0)^{n+r_2}$

LOGARITMISTA RATKAISUA EI KANNATA LASKEA "WRONSKIN KAAVAN" AVULLA $f_1(z)$:STA, VAAN YRITTEESTÄ

$$f_2(z) = f_1(z) \operatorname{Log} z + \sum_n h_n z^n$$

<u>SARJARATKAISUN SUPPENEMINEN</u>

<u>LAUSE.</u>

OLKOON SARJOJEN $(z-z_0)P(z) = \sum_{n=0}^\infty p_n (z-z_0)^n$, $(z-z_0)^2 Q(z) = \sum_{n=0}^\infty q_n (z-z_0)^n$ SUPPENEMISSÄTEET R_P JA R_Q. TÄLLÖIN YHTÄLÖN $f'' + Pf' + Qf = 0$ SARJARATKAISUMENETELMÄSSÄ ESIINTYVÄT SARJAT $\sum_n f_n (z-z_0)^n$, $\sum h_n (z-z_0)^n$ SUPPENEVAT ALUEESSA $D_R^0(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq |z-z_0| < R\}$, $R = \min(R_P, R_Q)$ JA OVAT DY:N RATKAISUJA ALUEESSA $0 < |z-z_0| < R$.
($z = z_0$ VOI OLLA RATKAISUJEN ERIKOISPISTE)

HYPERGEOMETRINEN YHTÄLÖ

(CARL FRIEDRICH GAUSS 1777 - 1855)

$$z(1-z)f''(z) + \left[c-(a+b+1)z\right]f'(z) - ab\,f(z) = 0$$

$$P(z) = \frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}$$

$$Q(z) = -\frac{ab}{z(1-z)}$$

$z = 0, 1, \infty$ HEIKKOJA ERIKOISPISTEITÄ

KEHITETÄÄN $f(z)$ $z = 0$ YMPÄRILLÄ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{n+r}, \quad f_0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ (INDEKSIYHTÄLÖ)

$$r(r-1) + cr = r(r+c-1) = 0$$

RATKAISUT $r = 0$
$r = 1-c$

PALAUTUSKAAVA

$$(n+r)(n+r+c-1)f_n = \left[(n+r-1)(n+r+a+b-1)+ab\right]f_{n-1}$$
$$= (n+r-1+a)(n+r-1+b)f_{n-1}$$

1) $1-c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

a) RATKAISU $r = 0$

$$f_n = \frac{(n-1+a)(n-1+b)}{n(n-1+c)} f_{n-1}$$

$$f_n = \frac{f_n}{f_{n-1}} \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}} \frac{f_{n-2}}{f_{n-3}} \cdots \frac{f_1}{f_0} f_0$$
$$= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(k-1+a)(k-1+b)}{k(k-1+c)}\right) f_0$$

POCHHAMMERIN SYMBOLI

(LEO AUGUST POCHHAMMER 1841 - 1920)

$$(\alpha)_n \equiv \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \qquad n = 1, 2, \ldots$$
$$(\alpha)_0 \equiv 1$$

$$\Rightarrow f_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n!\,(c)_n} f_0$$

KUN VAL. $f_0 = 1$

TOINEN RATKAISU ON SIIS HYPERGEOMETRINEN FUNKTIO

$$F(a, b; c; z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!\,(c)_n} z^n$$

SARJA SUPPENEE KUN $|z| < 1$.

b) $r = 1-c$ $\Rightarrow f_n = \dfrac{(n+a-c)(n+b-c)}{n(n+1-c)} f_{n-1}$

$$\Downarrow$$

$$f_n = \frac{(1+a-c)_n (1+b-c)_n}{n!\,(2-c)_n} f_0$$

ANTAA TOISEN RATKAISUN

$$f_2(z)/f_0 = z^{1-c} F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z)$$

YLEINEN RATKAISU

$$f(z) = C_1 F(a, b; c; z) + C_2 z^{1-c} F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z)$$

LEGENDREN YHTÄLÖ

(ADRIEN-MARIE LEGENDRE 1752–1833)

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

$$(1-z^2)\frac{d^2 f}{dz^2} - 2z\frac{df}{dz} + \lambda(\lambda+1) f(z) = 0$$

FYSIIKASSA $z = \cos\theta$; MEITÄ KIINNOSTAA SIIS $-1 \le z \le 1$

$$P(z) = -\frac{2z}{1-z^2} = -\frac{2z}{(1+z)(1-z)} \qquad Q(z) = \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-z^2}$$

$z = +1$, $= -1$, $= \infty$ HEIKKOJA ERIKOISPISTEITÄ

ETSITÄÄN SARJARATKAISU $z = 1$ YMPÄRILLÄ

MÄÄR. $u = \frac{1-z}{2}$ $\quad (\Leftrightarrow z = 1-2u)$ $\quad z=-1 \Leftrightarrow u=1$

KÄYTTÄEN $\frac{d}{dz} = -\frac{1}{2}\frac{d}{du}$ YHTÄLÖ SAA MUODON

$$u(1-u)\frac{d^2 f}{du^2} + (1-2u)\frac{df}{du} + \lambda(\lambda+1) f(u) = 0$$

HYPERGEOM.! $a = \lambda+1,\ b = -\lambda,\ c = 1$

YRITE $f(u) = f_0 u^r + f_1 u^{r+1} + \dots$

JOHTAA KARAKTERISTISEEN YHTÄLÖÖN

$$[r(r-1) + r] f_0 u^{r-1} + \mathcal{O}(u^r) = 0$$

$\Rightarrow \quad r^2 = 0 \quad$ (KAIKILLE λ !)

SIIS SAADAAN YKSI SARJARATKAISU

$$f_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n u^n$$

TOINEN : $f_2(u) = f_1(u)\log u + \sum_{n=0}^{\infty} h_n u^n$

$$u(1-u)f'' + (1-2u)f' + \lambda(\lambda+1)f = 0$$

SIJ. $f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k u^k$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\Big[\, k(k-1) f_k (u^{k-1} - u^k) + k f_k (u^{k-1} - 2u^k) + \lambda(\lambda+1) f_k u^k \Big] \qquad n=k-1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{ n(n+1) f_{n+1} - n(n-1) f_n + (n+1) f_{n+1} - 2n f_n + \lambda(\lambda+1) f_n \Big\} u^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{ (n+1)^2 f_{n+1} + \big(-n(n+1) + \lambda(\lambda+1)\big) f_n \Big\} u^n = 0$$

$\Rightarrow$ REKURSIOKAAVA

$$f_{n+1} = \frac{n(n+1) - \lambda(\lambda+1)}{(n+1)^2} f_n \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{(n-1-\lambda)(n+\lambda)}{n^2} \qquad n = 1, 2, \dots$$

RATKAISU :

$$f_n = \frac{f_n}{f_{n-1}} \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}} \cdots \frac{f_1}{f_0} f_0 =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+\lambda)(k-1-\lambda)}{k^2} f_0 = \frac{(\lambda+1)_n (-\lambda)_n}{(n!)^2} f_0$$

MISSÄ POCHHAMMERIN SYMBOLI (LEO POCHHAMMER 1841 – 1920)

$$(a)_n \equiv a(a+1)\cdots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

NORMALISOINNILLA $f_0 = 1$ SAADAAN LEGENDREN (1. LAJIN) FUNKTIO $P_\lambda(z)$ (1785)

$$P_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1)_n (-\lambda)_n}{(n!)^2} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n, \quad P_\lambda(1) = 1$$

SUPPENEEKO SARJA KOKO VÄLILLÄ $-1 \le z \le 1$

ELI $0 \le u \le 1$?

SUURILLA n

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{n(n-1) - \lambda(\lambda+1)}{n^2} \approx \frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{n-1}{n}$$

$$\Rightarrow f_n \simeq \frac{1}{n}$$

$$P_\lambda(u) \simeq \sum_n \frac{u^n}{n} = \log(1-u)$$

DIVERGOI LOGARITMISESTI KUN $u \to 1$

PAITSI JOS λ ON S.E. $\lambda(\lambda+1) = n(n+1)$

JOLLEKIN n, JOLLOIN

$$0 = f_{n+1} = f_{n+2} = \cdots$$

ELI $P_\lambda(u)$ ON n:NNEN ASTEEN POLYNOMI u:SSA

$\Leftrightarrow$ n:NNEN ASTEEN POLYNOMI z:SSA

$$\lambda(\lambda+1) = n(n+1) \Rightarrow \lambda = n \quad \text{TAI} \quad \lambda = -n-1$$

SIIS λ = KOKONAISLUKU

VOIDAAN RAJOITTUA ARVOIHIN $\lambda = n$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

KOSKA JOS $\lambda \to -\lambda - 1$ $\quad \lambda(\lambda+1) \to \lambda(\lambda+1)$

$\Rightarrow$ LEGENDREN POLYNOMIT

$$P_\ell(z) = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{(\ell+1)_n (-\ell)_n}{(n!)^2} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

LASKEMALLA

$$(-\ell)_n = (-\ell)(-\ell+1)\cdots(-\ell+n-1)$$
$$= (-1)^n \ell(\ell-1)\cdots(\ell-n+1) = (-1)^n \frac{\ell!}{(\ell-n)!}$$

$$(\ell+1)_n = (\ell+1)(\ell+2)\cdots(\ell+n) = \frac{(\ell+n)!}{\ell!}$$

SAADAAN KÄYTTÖKELPOISEMPI MUOTO

$$P_\ell(z) = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{(-1)^n (\ell+n)!}{(n!)^2 (\ell-n)!} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \tfrac{1}{2}(3z^2 - 1), \ldots$$

KEHITTÄMÄLLÄ $(1-z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-z)^k$ SAADAAN

SOTKUISTEN VÄLIVAIHEIDEN KAUTTA

$$P_\ell(z) = \sum_{k=0}^{[\ell/2]} \frac{(-1)^k (2\ell-2k)!}{2^\ell k! (\ell-2k)! (\ell-k)!} z^{\ell-2k} \qquad (*)$$

($[\frac{\ell}{2}]$ = $\frac{\ell}{2}$:N KOKONAISLUKUOSA = $\begin{cases} \ell/2 & \ell \text{ PARILLINEN} \\ \frac{1}{2}(\ell-1) & \ell \text{ PARITON} \end{cases}$)

$$(*) \Rightarrow P_\ell(-z) = (-1)^\ell P_\ell(z)$$

LEGENDREN YHTÄLÖN $P_\lambda(z)$:STA LIN.RIIPPUMATTOMAKSI RATKAISUKSI OTETAAN TAVANOMAISESTI LEGENDREN 2. LAJIN FUNKTIO

$$Q_\lambda(z) = \frac{1}{2^{\lambda+1}} \int_{-1}^{1} dt\, (1-t^2)^\lambda (z-t)^{-\lambda-1}$$

INTEGRAALIESITYS

(KATSO CRONSTRÖM)

LEGENDREN 2. LAJIN FUNKTIOT

LEGENDREN YHTÄLÖ

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{df_n}{dx}\right) + n(n+1) f_n = 0$$

LÖYDETTIIN POLYNOMIRATKAISU $f_n(x) = P_n(x)$, SÄÄNNÖLLINEN HEIKOISSA ERIKOISPISTEISSÄ $x = \pm 1$

TOINEN RIIPPUMATON RATKAISU g_n SAADAAN ESIM. KAAVASTA

$$g_n(x) = C\, P_n(x) \int^x \frac{dy}{(1-y^2)[P_n(y)]^2}$$

ESIM. $P_0(x) = 1$

$$g_0(x) = C \int^x \frac{dy}{(1-y)(1+y)} = \frac{C}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

2. LAJIN LEGENDREN FUNKTIO

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

LOGARITMISIA KIERTOPISTEITÄ $x = \pm 1$:SSÄ

$P_1(x) = x$

$$g_1(x) = C x \cdot \int^x \frac{dy}{(1-y^2)y^2}$$

$$\frac{1}{y^2(1-y^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) + \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow g_1(x) = C x \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{x}\right)$$

$$Q_1(x) = x\left(\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - 1$$

OSOITTAUTUU ETTÄ PALAUTUSKAAVA

$$Q_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\left[(2n+1)x\, Q_n(x) - n\, Q_{n-1}(x)\right]$$

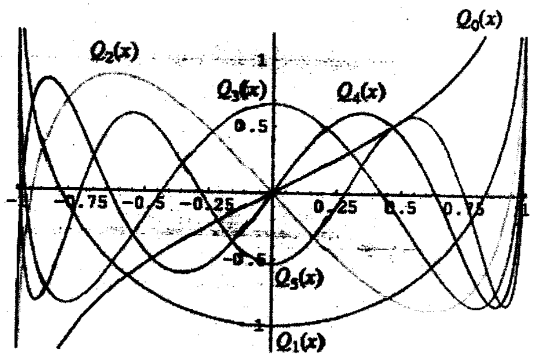
ON VOIMASSA MYÖS 2. LAJIN FUNKTIOILLE, SIITÄ VOI LASKEA $Q_n(x)$, $n \geq 3$.

VASTAAVASTI VOIDAAN TUTKIA LEGENDREN 2. LAJIN LIITTOFUNKTIOITA $Q_\ell^m(x)$ (KATSO ABRAMOWITZ-STEGUN, LUKU 8).

102

Calculus and Analysis ▸ Special Functions ▸ Miscellaneous Special Functions ▾

Legendre Function of the Second Kind



The second solution $Q_l(x)$ to the Legendre differential equation. The Legendre functions of the second kind satisfy the same recurrence relation as the Legendre polynomials. The Legendre functions of the second kind are implemented in *Mathematica* as `LegendreQ[l, x]`. The first few are

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

$$Q_2(x) = \frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3x}{2}$$

$$Q_3(x) = \frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3}.$$

The associated Legendre functions of the second kind $Q_l^m(x)$ are the second solution to the associated Legendre differential equation, and are implemented in *Mathematica* as `LegendreQ[l, m, x]`. $Q_\nu^\mu(x)$ has derivative about 0 of

$$\left[\frac{dQ_\nu^\mu(x)}{dx}\right]_{x=0} = \frac{2^\mu\sqrt{\pi}\cos[\frac{1}{2}\pi(\nu+\mu)]\Gamma(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2})}$$

103

RODRIGUESIN KAAVA

(OLINDE RODRIGUES 1794 - 1851)

OLKOON $W_n(x) = (x^2-1)^n$

$$\Rightarrow \frac{dW_n(x)}{dx} = n(x^2-1)^{n-1}\cdot 2x$$

$\Rightarrow W_n$ TOTEUTTAA $(x^2-1)\frac{dW_n}{dx} - 2nxW_n = 0$

DERIVOIDAAN TÄMÄ YHTÄLÖ $n+1$ KERTAA

(LEIBNIZIN KAAVA k:nnelle DERIVAATALLE

$$\frac{d^k}{dx^k}\big(A(x)B(x)\big) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{d^jA(x)}{dx^j}\frac{d^{k-j}B(x)}{dx^{k-j}}$$

BINOMIKERROIN $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}$)

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x^2-1)\frac{dW_n}{dx}\right] = (x^2-1)\frac{d^{n+2}W_n}{dx^{n+2}} + \binom{n+1}{1}(2x)\frac{d^{n+1}W_n}{dx^{n+1}} + \binom{n+1}{2}\cdot 2\frac{d^nW_n}{dx^n}$$

$$= (x^2-1)\frac{d^{n+2}W_n}{dx^{n+2}} + 2(n+1)x\frac{d^{n+1}W_n}{dx^{n+1}} + n(n+1)\frac{d^nW_n}{dx^n}$$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(xW_n) = x\frac{d^{n+1}W_n}{dx^{n+1}} + (n+1)\frac{d^nW_n}{dx^{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x^2-1)\frac{dW_n}{dx} - 2nxW_n\right] =$$

$$= (x^2-1)\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}W_n + 2x\frac{d^{n+1}W_n}{dx^{n+1}} - n(n+1)\frac{d^nW_n}{dx^n} = 0$$

FUNKTIO $u_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{d^n w_n}{dx^n}$

ON POLYNOMI ASTETTA n JA TOTEUTTAA

$$(1-x^2)\frac{d^2u_n}{dx^2} - 2x\frac{du_n}{dx} + n(n+1)u_n = 0$$

S.O. LEGENDREN YHTÄLÖN!

$$\Rightarrow \quad u_n(x) = \underset{\uparrow \text{VAKIO}}{K_n} P_n(x)$$

$$u_n(1) = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x+1)^n(x-1)^n\right]_{x=1}$$

$$= n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 1\cdot 2^n = n!\,2^n = K_n \overbrace{P_n(1)}^{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n} \qquad (R1)$$

RODRIGUESIN KAAVA

ORTONORMITUSRELAATIOT

HALUAMME LASKEA

$$I_{nm} = \int_{-1}^{1} dx\, P_n(x)P_m(x) = I_{mn}$$

VOIDAAN SIIS AINA VALITA $n \geq m$

$$I_{nm} \overset{(R1)}{=} \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} dx\left(\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right)P_m(x) \overset{\text{OS. INTEGR.}}{=}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2^n n!}\Big/_{-1}^{1}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right)P_m(x)}_{} - \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}dx\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right)\frac{dP_m(x)}{dx}$$

$= 0$, VÄH. YKSI (x^2-1) TEKIJÄ JÄÄ, ESIM $\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^3 = 6(x^2-1)^2 + 24x^2(x^2-1)$

JATKETAAN OS. INTEGROINTIA

$$= \ \cdots = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}dx\,(x^2-1)^n\frac{d^nP_m(x)}{dx^n}$$

JOS $n > m$ $\quad \frac{d^nP_m(x)}{dx^n} = 0$, $\left(P_m \text{ POLYNOMI ASTETTA } m < n\right)$

SIIS $\quad I_{nm} = 0 \quad n \neq m$

KUN $n = m$ (R1) ANTAA

$$\frac{d^nP_n(x)}{dx^n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\Rightarrow I_{nn} = \frac{(-1)^n(2n)!}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}dx\,(x^2-1)^n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\underbrace{\int_{-1}^{1}dx\,(1-x^2)^n}_{= \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

$$= \frac{2}{2n+1}$$

SIIS : $$\int_{-1}^{1} dx\, P_n(x) P_m(x) = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{mn} \qquad (O)$$

$(\delta_{nm} = 0 \;\; n \neq m, \;\; \delta_{nn} = 1)$

LEGENDREN POLYNOMIT OVAT <u>ORTOGONAALISIA</u> <u>POLYNOMEJA</u> VÄLILLÄ $[-1, 1]$

<u>FUNKTION KEHITTÄMINEN $P_n(x)$ MUKAAN</u>

<u>WEIERSTRASSIN APPROKSIMAATIOLAUSE</u> : MIKÄ TAHANSA VÄLILLÄ $a \le x \le b$ JATKUVA FUNKTIO VOIDAAN APPROKSIMOIDA MIELIVALTAISEN TARKASTI POLYNOMILLA : ANNETTU $\varepsilon > 0$, LÖYTYY POLYNOMI $\mathcal{P}$ S.E.

$$\int_a^b dx\, |f(x) - \mathcal{P}(x)| < \varepsilon$$

(KARL WEIERSTRASS 1815 – 1897)

KUN VÄLI ON $-1 \le x \le 1$ VOIDAAN KÄYTTÄ LEGENDREN POLYNOMEJA

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \qquad (P)$$

KÄÄNTEINEN KAAVA:

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_m(x) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{1} dx\, P_m(x) P_n(x) = \frac{2}{2m+1}\, a_m$$

$$\Rightarrow \quad a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} dx\, P_m(x) f(x)$$

JOS ~~TÄMÄ~~ TULOS SIJOITETAAN KEHITELMÄÄN (P) SAADAAN

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) \int_{-1}^{1} dy\, P_n(y) f(y)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) P_n(y) = \delta(x-y) \qquad -1 \le x, y \le 1$$

<u>MUODOSTAJAFUNKTIO</u> (GENEROIVA FUNKTIO)

TARKASTELLAAN

$$g(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(x)\, t^n \qquad (G)$$

($-1 \le x \le 1$; SARJA SUPPENEE KUN $|t| < 1$, JOS $|x| < 1$ SARJA SUPPENEE MYÖS $t = \pm 1$:SSÄ)

$\tilde{P}_n(x)$ ON POLYNOMI ASTETTA n , OSOITAMME MYÖHEMMIN $\tilde{P}_n(x) = P_n(x)$ (LEGENDREN POLYN.)

YHTÄLÖSTÄ (G) SEURAA VÄLITTÖMÄSTI

$$g(t,1) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \overset{P.O.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(1)\, t^n$$

$$\Rightarrow \tilde{P}_n(1) = 1$$

$$g(t,-1) = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(-1)\, t^n$$

$$\Rightarrow \tilde{P}_n(-1) = (-1)^n$$

$$g(-t,-x) = g(t,x) = \sum_n \tilde{P}_n(x)\, t^n$$

$$\| $$

$$\sum_n \tilde{P}_n(-x)(-t)^n \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{P}_n(-x) = (-1)^n\, \tilde{P}_n(x)$$

MUUTAMAT ENSIMMÄISET POLYNOMIT:

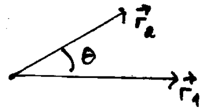
$$g = (1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (t^2-2xt)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(t^2-2xt) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2}(t^2-2xt)^2 + \cdots$$

$$= 1 + xt + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot 4x^2\right)t^2 + O(t^3)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\tilde{P}_0(x) = 1}_{=P_0(x)}, \quad \underbrace{\tilde{P}_1(x) = x}_{=P_1(x)}, \quad \underbrace{\tilde{P}_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)}_{=P_2(x)}, \ldots$$

ESIMERKKI KÄYTÖSTÄ:
(ED!)



$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \qquad r_> = \max(|\vec{r}_1|, |\vec{r}_2|)$$
$$r_< = \min(|\vec{r}_1|, |\vec{r}_2|)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\theta}} =$$

$$= \frac{1}{r_>}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta + \frac{r_<^2}{r_>^2}}} = \frac{1}{r_>}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n$$

PALAUTUSKAAVA

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-3/2}(-2x+2t)$$

$$= \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{P}_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\tilde{P}_n(x)t^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} n\tilde{P}_n(x)t^{n-1}$$

$$\| $$

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{P}_n(x)t^n$$

KERÄTÄÄN YHTEEN t:N SAMAN POTENSSIN KERTOIMET

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n\left(x\tilde{P}_n(x) - \tilde{P}_{n-1}(x) - (n+1)\tilde{P}_{n+1}(x) + 2xn\tilde{P}_n(x) - (n-1)\tilde{P}_{n-1}(x)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n\left[(2n+1)x\tilde{P}_n(x) - (n+1)\tilde{P}_{n+1}(x) - n\tilde{P}_{n-1}(x)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(2n+1)x\tilde{P}_n(x) = (n+1)\tilde{P}_{n+1}(x) + n\tilde{P}_{n-1}(x)}$$

TÄSTÄ: $\tilde{P}_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\left[(2n+1)x\tilde{P}_n(x) - n\tilde{P}_{n-1}(x)\right]$

NÄIN SAADAAN KAIKKI $\tilde{P}_n(x)$:T LÄHTEMÄLLÄ TUNNETUISTA

$\tilde{P}_0(x) = 1$, $\tilde{P}_1(x) = x \Rightarrow \tilde{P}_2(x) = \frac{1}{2}(3x\cdot x - 1) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$\tilde{P}_3(x) = \frac{1}{3}\left(5x\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1) - 2x\right) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

JNE.

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖITÄ

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = \frac{t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n'(x)\, t^n$$

$$\Rightarrow \quad (1-2xt+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n'(x)\, t^n = t \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(x)\, t^n$$

KERÄTÄÄN TAAS YHTEEN t^n TERMIT

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \left[\tilde{P}_n'(x) - 2x\tilde{P}_{n-1}'(x) + \tilde{P}_{n-2}'(x) - \tilde{P}_{n-1}(x) \right] = 0$$

$(n \to n+1)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{P}_{n+1}'(x) - 2x\tilde{P}_n'(x) + \tilde{P}_{n-1}'(x) = \tilde{P}_n(x)} \qquad (A)$$

PALAUTUSKAAVAA $\quad (2n+1)x\tilde{P}_n = (n+1)\tilde{P}_{n+1} + n\tilde{P}_{n-1}$

DERIVOIMALLA SAADAAN

$$(2n+1)\, x\, \tilde{P}_n'(x) = (n+1)\tilde{P}_{n+1}'(x) + n\tilde{P}_{n-1}'(x) - (2n+1)\tilde{P}_n(x)$$

RATKAISTAAN $x\tilde{P}_n'$, SIJOITETAAN YHTÄLÖÖN (A):

$$\tilde{P}_{n+1}' - \frac{2}{2n+1}\left[(n+1)\tilde{P}_{n+1}' + n\tilde{P}_{n-1}'\right] + 2\tilde{P}_n + \tilde{P}_{n-1}' =$$

$$= -\frac{1}{2n+1}\tilde{P}_{n+1}' + \frac{1}{2n+1}\tilde{P}_{n-1}' + 2\tilde{P}_n = \tilde{P}_n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{P}_{n+1}'(x) - \tilde{P}_{n-1}'(x) = (2n+1)\tilde{P}_n(x)} \qquad (B)$$

(A) − (B) ANTAA $\quad \boxed{\tilde{P}_{n-1}'(x) = x\tilde{P}_n'(x) - n\tilde{P}_n(x)} \qquad (C)$

(A) + (B) ANTAA $\quad \boxed{\tilde{P}_{n+1}'(x) = x\tilde{P}_n'(x) + (n+1)\tilde{P}_n(x)} \qquad (D)$

JONKA KIRJOITAMME MUOTOON

$$\boxed{\tilde{P}_n'(x) = x\tilde{P}_{n-1}'(x) + n\tilde{P}_{n-1}(x)} \qquad (D_1)$$

(D_1): $\quad \tilde{P}_n'(x) = x\tilde{P}_{n-1}'(x) + n\tilde{P}_{n-1}(x)$

(C):STÄ SAADAAN $\quad x\tilde{P}_{n-1}' = x^2\tilde{P}_n' - nx\tilde{P}_n$,

SIJOITETAAN YHTÄLÖÖN (D_1) $\Rightarrow$

$$\boxed{(1-x^2)\tilde{P}_n'(x) = -nx\tilde{P}_n(x) + n\tilde{P}_{n-1}(x)} \qquad (E)$$

DERIVOIDAAN (E) $\Rightarrow$

$$(1-x^2)\tilde{P}_n'' - 2x\tilde{P}_n' + nx\tilde{P}_n' + n\tilde{P}_n - n\tilde{P}_{n-1}' = 0$$

ELI

$$(1-x^2)\tilde{P}_n'' + x(n-2)\tilde{P}_n' + n\tilde{P}_n - n\tilde{P}_{n-1}' = 0$$

TÄSSÄ KÄYTÄMME YHTÄLÖÄ (C): $\tilde{P}_{n-1}' = x\tilde{P}_n' - n\tilde{P}_n$
ELIMINOIMAAN TERMIÄ $n\tilde{P}_{n-1}'$ $\Rightarrow$ DIFFERENTIAALIYHTÄLÖ VAIN $\tilde{P}_n$:LLE

$$(1-x^2)\tilde{P}_n''(x) - 2x\tilde{P}_n'(x) + n(n+1)\tilde{P}_n(x) = 0 \qquad (L)$$

S.O. LEGENDREN YHTÄLÖ $\lambda = n$

$\tilde{P}_n(x)$ ON n:NNEN ASTEEN POLYNOMI, JOKA TOTEUTTAA YHTÄLÖN (L) JA NORMITUSEHDON $\tilde{P}_n(1) = 1$

$$\Rightarrow \quad \tilde{P}_n(x) = P_n(x)$$

LEGENDREN LIITTOFUNKTIOT

MÄÄRITELMÄ: LEGENDREN LIITTOFUNKTIO

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n}{dx^m} \qquad P_n = \text{LEGENDREN POLYNOMI}$$

$m = 0, 1, 2, \ldots, n \quad ; \quad P_n^0(x) = P_n(x)$

KUN m = PARITON P_n^m EI POLYNOMI

VAROITUS: USEAT LÄHTEET (ESIM. ABRAMOWITZ-STEGUN, MATHWORLD, ...) MÄÄR.

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m}$$

PARITEETTI: $P_n^m(-x) = (1-(-x)^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(-x)}{d(-x)^m} = (-1)^{n+m} P_n^m(x)$

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖ

$P_n(x)$ TOTEUTTAA $(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0$

DERIVOIDAAN m KERTAA

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2}\right] = (1-x^2)\frac{d^{m+2}P_n}{dx^{m+2}} - 2mx\frac{d^{m+1}P_n}{dx^{m+1}} - m(m-1)\frac{d^m P_n}{dx^m}$$

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(x\frac{dP}{dx}\right) = x\frac{d^{m+1}P}{dx^{m+1}} + m\frac{d^m P}{dx^m}$$

MERK. $u(x) = \frac{d^m P_n}{dx^m}$

$$\Rightarrow \frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n\right] =$$

$$= (1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

$v(x) = (1-x^2)^{m/2} u(x)$

$$\Rightarrow u'(x) = (1-x^2)^{-m/2}\left(v' + \frac{mx}{1-x^2}v\right)$$

$$u''(x) = (1-x^2)^{-m/2}\left(v'' + \frac{2mx}{1-x^2}v' + \frac{m}{1-x^2}v + \frac{m(m+2)x^2}{(1-x^2)^2}v\right)$$

SIJOITETAAN u:N YHTÄLÖÖN, KERROTAAN $(1-x^2)^{m/2}$:LLA

$\Rightarrow$ LEGENDREN LIITTOYHTÄLÖ

$$\boxed{(1-x^2)v'' - 2xv' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]v = 0} \qquad \text{(LL)}$$

$v(x) = P_n^m(x)$ ON TÄMÄN YHTÄLÖN RATKAISU,

$|v(x)| < \infty \quad -1 \le x \le 1$

SIJOITUKSELLA $x = \cos\theta$ YHTÄLÖ ON

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dv}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]v = 0$$

ELI YHTÄLÖN $\nabla^2 u + f(r)u = 0$ SEPAROINNISSA $u(r,\theta,\varphi) = R(r)v(\theta)\Phi(\varphi)$ SAATU YHTÄLÖ θ-RIIPPUVUUDELLE, KUN $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$

LIITTOYHTÄLÖ (LL) SISÄLTÄÄ VAIN m^2, JOTEN VOIMME LAAJENTAA MÄÄRITELMÄN ARVOILLE $-n \le m \le -1$ ASETTAMALLA

$$P_n^{-m}(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VAKIO}}}{K_{nm}} P_n^m(x)$$

SOPIVA VAKION VALINTA SAADAAN RODRIGUESIN KAAVASTA

(R1) $\Rightarrow$ $$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n \quad , \; m \geq 0$$

TÄMÄ KAAVA ON MYÖS MIELEKÄS KUN $m = -1, -2, \dots, -n$; OTETAAN SE MÄÄRITELMÄKSI KUN $m < 0$

$$\Rightarrow \quad P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x)$$

ESIM $$P_n^n(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{n/2}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = \frac{(2n)!}{2^n n!}(1-x^2)^{n/2}$$

$$P_n^{-n}(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{-n/2}(-1)^n(1-x^2)^n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x^2)^{n/2}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{(2n)!} P_n^n(x)$$

MUUTAMIA LIITTOFUNKTIOITA :

$$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2} \overset{x=\cos\theta}{=} \sin\theta$$

$$P_1^0(x) = P_1(x) = x = \cos\theta$$

$$P_1^{-1}(x) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2} = -\tfrac{1}{2}\sin\theta$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) = 3\sin^2\theta$$

$$P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2} = 3\sin\theta\cos\theta$$

$$P_2^0(x) = P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2-1) = \tfrac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$P_2^{-1}(x) = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} = -\tfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$P_2^{-2}(x) = \tfrac{1}{8}(1-x^2) = \tfrac{1}{8}\sin^2\theta$$

PALAUTUSKAAVOJA

LÖYTYY LUKUISASTI (KATSO TAULUKOITA)

ESIMERKKI :

LEGENDREN POLYNOMEILLE JOHDIMME

$$(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$$

DERIVOIDAAN m KERTAA JA KERROTAAN TEKIJÄLLÄ $(1-x^2)^{m/2+1/2}$

$$\Rightarrow \quad \underline{(2n+1)\sqrt{1-x^2}\,P_n^m(x) = P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-1}^{m+1}(x)}$$

ORTOGONALITEETTI

$P_n^m(\cos\theta)$ ESIINTYY USEIMMITEN YHDESSÄ TEKIJÄN $e^{im\varphi}$ KANSSA ; $\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{im\varphi} e^{-im'\varphi} = 2\pi\,\delta_{mm'}$

JOHTAA SIIHEN, ETTÄ TÄRKEIN ORTOGONALITEETTI-INTEGRAALI ON

$$J_{hk}^{mm} = \int_{-1}^{1} dx\, P_h^m(x)\, P_k^m(x) \qquad (\underline{\text{SAMA}}\ m)$$

OLKOON ALUKSI $h \neq k$ JA $h < k$

$$J_{hk}^{mm} = \int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2)^m \frac{d^m P_h}{dx^m}\frac{d^m P_k}{dx^m}$$

$$J^{mm}_{hk} = \int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2)^m \frac{d^m P_h(x)}{dx^m}\,\frac{d^m P_k(x)}{dx^m}$$

$Q(x) = (1-x^2)^m \dfrac{d^m P_h}{dx^m}$ ON POLYNOMI ASTETTA

$2m + h - m = m + h$, JOLLA ON m-KERTAISET

NOLLAKOHDAT PISTEISSÄ $x = 1$ JA $x = -1$

$\left((1-x^2)^m = (1+x)^m (1-x)^m \right)$

$\Rightarrow \dfrac{d^j Q}{dx^j}$:LLÄ ON $(m-j)$-KERTAISET NOLLAKOHDAT

$x = \pm 1$:SSÄ

$$\Rightarrow J^{mm}_{hk} = \int_{-1}^{1} dx\, Q(x) \frac{d^m P_k}{dx^m} = \underbrace{\Big/_{-1}^{1} Q(x) \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}}}_{=0\ (Q(1) = Q(-1) = 0)} - \int_{-1}^{1} dx \frac{dQ}{dx} \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}}$$

$$= \underbrace{- \Big/_{-1}^{1} Q'(x) \frac{d^{m-2} P_k}{dx^{m-2}}}_{=0\ Q'(1) = Q'(-1) = 0} + \int_{-1}^{1} dx\, Q''(x) \frac{d^{m-2} P_k}{dx^{m-2}} =$$

$$= \cdots = (-1)^m \int_{-1}^{1} dx \frac{d^m Q}{dx^m} P_k(x)$$

NYT $\dfrac{d^m Q}{dx^m}$ ON POLYNOMI ASTETTA h

$$\Rightarrow R(x) \equiv \frac{d^m Q}{dx^m} = \sum_{\ell=0}^{h} a_\ell P_\ell(x) \quad , \quad \text{JA}$$

$$J^{mm}_{hk} = (-1)^m \sum_{\ell=0}^{h} a_\ell \int_{-1}^{1} dx\, P_\ell(x) P_k(x) = 0 \qquad h < k$$

TARK. SEURAAVAKSI $h = k$

$$J^{mm}_{kk} = (-1)^m \int_{-1}^{1} dx \frac{d^m Q}{dx^m} P_k(x) \overset{\text{RODRIGUES}}{=} \frac{(-1)^m}{2^k k!} \int_{-1}^{1} dx\, R(x) \frac{d^k}{dx^k} (x^2-1)^k$$

$x = \pm 1$ OVAT $\dfrac{d^{k-j}}{dx^{k-j}} (x^2-1)^k$ j-KERTAISIA NOLLAKOHTIA

$$\Rightarrow J^{mm}_{kk} = \frac{(-1)^m}{2^k k!} \underbrace{\Big/_{-1}^{1} R(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (x^2-1)^k}_{=0} - \frac{(-1)^m}{2^k k!} \int_{-1}^{1} dx\, R'(x) \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (x^2-1)^k$$

$$= \cdots \frac{(-1)^{m+k}}{2^k k!} \int_{-1}^{1} dx \frac{d^k R}{dx^k} (x^2-1)^k$$

R OLI ASTETTA k OLEVA POLYNOMI :

$$R(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \cdots$$

$$\frac{d^k R}{dx^k} = k!\, A_k \quad \Rightarrow J^{mm}_{kk} = \frac{(-1)^{m+k}}{2^k} A_k \int_{-1}^{1} dx\, (x^2-1)^k$$

$$\int_{-1}^{1} dx\, (x^2-1)^k = \int_{-1}^{1} dx\, (1+x)^k (1-x)^k (-1)^k =$$

$t = \frac{1}{2}(1+x)$

$\Rightarrow 1-x = 2(1-t)$

$$= 2^{2k+1} (-1)^k \int_{0}^{1} dt\, t^k (1-t)^k$$

$$= (-1)^k\, 2^{2k+1} B(k+1, k+1)$$

$$= (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k+1)!}\, 2^{2k+1}$$

$$\Rightarrow J^{mm}_{kk} = (-1)^m \frac{(k!)^2\, 2^{k+1}}{(2k+1)!} A_k$$

TÄMÄ ON MUUTENKIN HYÖDYLLINEN TULOS : JOS $R(x)$ ON ASTETTA k OLEVA POLYNOMI : $R(x) = \sum_{j=0}^{k} A_j x^j$,

NIIN
$$\int_{-1}^{1} dx\, R(x) P_k(x) = \frac{2^{k+1} (k!)^2}{(2k+1)!} A_k$$

A_k LASKETAAN RODRIGUESIN KAAVASTA

$$Q(x) = (1-x^2)^m \frac{d^m P_k}{dx^m} = \frac{(1-x^2)^m}{2^k k!} \frac{d^{m+k}}{dx^{m+k}} (x^2-1)^k$$

$$\frac{d^{m+k}}{dx^{m+k}} x^{2k} = 2k(2k-1)\cdots(2k-m-k+1)\, x^{k-m}$$

$$= \frac{(2k)!}{(k-m)!} x^{k-m}$$

$$(1-x^2)^m = (-1)^m x^{2m} + \dots$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{(-1)^m (2k)!}{2^k k! (k-m)!} x^{k+m} + \dots$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{d^m Q}{dx^m} = \underbrace{\frac{(-1)^m (2k)! (k+m)!}{2^k (k!)^2 (k-m)!}}_{A_k} x^k + \dots$$

$$\Rightarrow J^{mm}_{kk} = (-1)^m \frac{(k!)^2 2^{k+1}}{(2k+1)!} \frac{(-1)^m (2k)! (k+m)!}{2^k (k!)^2 (k-m)!}$$

$$= \frac{2}{2k+1} \frac{(k+m)!}{(k-m)!}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{1} dx\, P^m_h(x) P^m_k(x) = \frac{2}{2k+1} \frac{(k+m)!}{(k-m)!} \delta_{hk}}$$

TÄYDELLISYYS OLKOON $m > 0$

$$\Pi^m_n(x) \equiv (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} P^m_n(x) = \frac{d^m P_n}{dx^m}$$

ON POLYNOMI ASTETTA $n-m$ $\quad n = m, m+1, m+2 \ldots$

x^p VOIDAAN LAUSUA $\Pi^m_m, \Pi^m_{m+1}, \ldots, \Pi^m_{m+p}$ LINEAARIYHDISTELMÄNÄ

$$x^p = \sum_{j=0}^{p} c_j \Pi^m_{m+j}(x)$$

WEIERSTRASSIN LAUSEEN NOJALLA VÄLILLÄ $[-1, 1]$ JATKUVA FUNKTIO $f(x)$ VOIDAAN LAUSUA SARJANA

$$(K) \quad f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \Pi^m_n(x) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} P^m_n(x)$$

KERTOIMET a_n MÄÄRÄYTYVÄT KAAVASTA

$$\int_{-1}^{1} dx\, (1-x^2)^{m/2} f(x) P^m_n(x) = \sum_{l=m}^{\infty} a_l \int_{-1}^{1} dx\, P^m_l(x) P^m_n(x)$$

$$= a_n \cdot \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} dx\, (1-x^2)^{\frac{m}{2}} f(x) P^m_n(x)$$