

Hamiltonin periaate

Fermat (1601–1665): “Valo kulkee pisteiden r_0 ja r välisen matkan tietä, jolle integraali $\int_{r_0}^r ds/\lambda$ saa miniminsä”

⇒ de Maupertuis (1689–1759):

Kaikkien mahdollisten liikkeiden joukosta luonto valitsee sen, joka toteutuu pienimmällä vaikutuksella S

$$S \equiv \int_{r_0}^r m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^t m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_0}^t 2T dt$$

Konservatiivinen systeemi $T = E - U$, missä E vakio:

$$S = \int_{t_0}^t (T + E - U) dt = E(t - t_0) + \int_{t_0}^t L dt$$

Hamilton: Kaikkien pisteiden $\{q_1\}$ ja $\{q_2\}$ välisten mahdollisten ratojen joukosta Valikoituu se, jolle (Hamiltonin) vaikutusintegraali

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q(t)\}, \{\dot{q}(t)\}, t) dt$$

saa ääriarvon, joko minimin tai maksimin.

Vähän variaatiolaskentaa

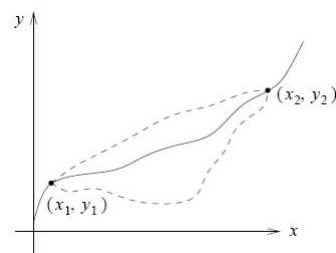
Olkoon $f(y, \dot{y}, x)$ määritelty radalla $y(x)$.

Merk. $\dot{y} = dy/dx$

Tehtävä: etsittävä rata $y(x)$, jolle

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx$$

saa ääriarvon (eli J on stationaarinen), kun y poikkeaa infinitesimaalisesti oikeasta ratkaisusta



$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x) \quad \begin{cases} \alpha & \text{variaatioparametri} \\ \eta(x) & \text{mieliv. funktio, jolle } \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx$$

$$\text{Stationaariselle ratkaisulle } y(x, 0): \left. \frac{dJ}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx \quad y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x)$$

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right\} dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} \right\} dx \quad \left| \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \right.$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \eta - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \eta \right\} dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right\} \eta(x) dx \quad \alpha\text{:n funktio } y(x, \alpha)\text{:n kautta}$$

Haluttiin stationaarinen ratkaisu, $J'(0) = 0$, kun $y(x) = y(x, 0)$:

$$\therefore \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right\} \eta(x) dx = 0, \text{ missä } y = y(x)$$

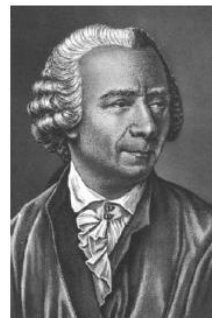
$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right\} \eta(x) dx = 0.$$

Tämä yhtälö on muotoa $\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x) dx = 0$, missä $\eta(x)$ mielivaltainen.

Variaatiolaskennan peruslemma $\Rightarrow M(x) = 0$

joka antaa Eulerin yhtälön (yhden monista!)

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0$$



Vertaa Lagrangen yhtälöön sijoittamalla

$$f = L, y = q, x = t$$

Esim. Määrätään lyhin tie kahden pisteen välillä tasossa

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \quad J = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

$$\text{Nyt } f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}, \text{ joten } \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$

$$\text{Sijoitetaan nämä Eulerin yhtälöön } \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0$$

$$0 = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \Rightarrow$$

$$c = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \Rightarrow \dot{y} = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \equiv a \Rightarrow$$

$$y = ax + b \quad (\text{suora, tottakai!})$$

Huom. Eulerin yhtälö takaa ainoastaan, että kyseessä on ääriarvo.
Onko kyseessä minimi vai maksimi täytyy päätellä tehtävän asettelusta, fysikaalisesta intuitiosta tms.

Esim. Minimaalinen pyörähdyskappaleen pinta-ala

Ol. pisteet $(x_1, y_1, 0)$ ja $(x_2, y_2, 0)$
yhdistää käyrä xy -tasossa.

Millainen käyrän on oltava, jotta sen muodostaman
pyörähdyskappaleen pinta-ala saa minimiarvon?

Käyräelementti $ds = \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$

tuottaa pyörähtaessään y -akselin ympäri nauhan,
jonka pinta-ala on

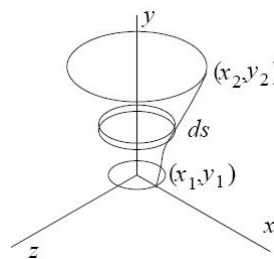
$$dA = 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

Kokonaispinta

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

Jälleen Eulerin yhtälö $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0$

$$f = x \sqrt{1 + \dot{y}^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x \dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$$



$$0 = \frac{d}{dx} \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \Rightarrow \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = a$$

$$a^2 = \frac{x^2\dot{y}^2}{1+\dot{y}^2} \Rightarrow \dot{y}^2(x^2 - a^2) = a^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow$$

$$y = a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = a \cosh^{-1} \frac{x}{a} + b \Rightarrow$$

$$x = a \cosh \frac{y-b}{a} \text{ ketjukäyrä}$$

Ketjukäyrään palataan toisessakin yhteydessä



Esim. Brachistocrone-ongelma

Jean Bernoulli (1696): Millaista rataa pitkin kappale liikuu (kitkatta) pisteestä 1 pisteeseen 2 lyhyimmässä ajassa?

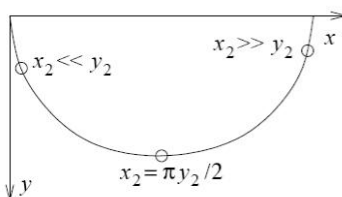
$$\text{Minimoitava aika } t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

$$\text{Energia säilyy } \Rightarrow mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad (y_1 = 0) \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

$$t_{12} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_1^2 \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}} dx \Rightarrow f = \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y}}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{HT} \Rightarrow x = \int_0^y \sqrt{\frac{\tilde{y}}{a-\tilde{y}}} d\tilde{y} \quad (\text{val. } x_1 = 0)$$

$$= -\sqrt{ay - y^2} + \frac{a}{2} \arccos(1 - 2y/a)$$



Parametrimuodossa (HT)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a(\varphi - \sin \varphi) \\ y = \frac{1}{2}a(1 - \cos \varphi) \end{cases} \text{ sykloidi}$$

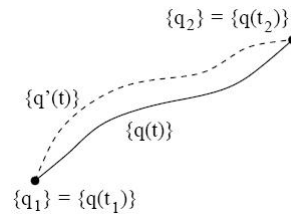
Lagrangen yhtälöiden johtaminen Hamiltonin periaatteesta

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q(t)\}, \{\dot{q}(t)\}, t) dt$$

Lasketaan $\delta I = I' - I$, missä I' laskettu pitkin rataa

$$q'_j(t) = q_j(t) + \delta q_j(t)$$

$$\dot{q}'_j(t) = \dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$$



$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q + \delta q\}, \{\dot{q} + \delta \dot{q}\}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt$$

vertaa $\delta x_i = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j$

I :n ääriarvo: $\delta I = 0$ mielivaltaisille δq_j

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \Rightarrow$$

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt$$

$$= \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2} - \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt$$

Vaaditaan päätepisteiden variaatiot $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0 \Rightarrow$ sijoitustermi katoaa.

Koska valitut $\delta q_j(t)$ muuten mielivaltaisia, saadaan

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j$$

Voidaan myös osoittaa, että Hamiltonin periaate seuraa Lagrangen yhtälöistä, joten kyseessä on kaksi vaihtoehtoista lähtökohtaa klassiselle mekaniikalle

Sidosvoimien määrittäminen

Lagrangen formalismi: sidokset "katoavat" muunnosyhtälöihin

$$x_i = x_i(\{q\}, t)$$

Sidosvoimien tunteminen kuitenkin usein tärkeää.

Palataan takaisin koordinaatteihin x_i

$$\text{Hamilton: } \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt = 0 \quad (\text{H})$$

Ol. systeemissä k kpl holonomisia sidoksia

$$f_l(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, k$$

$$\Rightarrow 0 = \delta f_l = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \delta x_i, \quad l = 1, 2, \dots, k$$

Kerrotaan nollat mieliv. funktioilla $\lambda_l(\{x\})$ ja summataan

$$0 = \sum_{l=1}^k \lambda_l \delta f_l = \sum_{l=1}^k \lambda_l \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \right) \delta x_i$$

Lisätään saadut nollat yhtälöön H:
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \right) \delta x_i dt = 0$$

Sidosten holonomisuus $\Rightarrow k$ kpl x -koordinaatteja voidaan kirjoittaa $n - k$ x -koordinaatin avulla. Merk.

$\{y_j\}$ $j = 1, \dots, n - k$ riippumattomia

$\{y_h\}$ $h = n - k + 1, \dots, n$ ei-riippumattomia

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n-k} \left(\frac{\partial L}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} + \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_j} \right) \delta y_j dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \sum_{h=n-k+1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial y_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_h} + \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_h} \right) \delta y_h dt$$

Funktiot λ_l (k kpl) ns. Lagrangen kertojat, jotka valittava s.e.

$$\frac{\partial L}{\partial y_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_h} + \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_h} = 0, \quad h = n-k+1, \dots, n \quad (k \text{ yhtälöä})$$

Tällöin riippumattomille δy_j

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n-k} \left(\frac{\partial L}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} + \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_j} \right) \delta y_j dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} - \frac{\partial L}{\partial y_j} = \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_j} \quad \forall j = 1, \dots, n-k$$

$$\stackrel{L=T-U}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_j} - \frac{\partial T}{\partial y_j} = - \frac{\partial U}{\partial y_j} + \underbrace{\sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_j}}_{\text{sidosvoimat}} \quad \forall j = 1, \dots, n-k$$

Esim. Heiluri tasossa (taas)

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ U = -mgx \end{cases} \Rightarrow L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx$$

Siirrytään napakoordinaatteihin $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta$$

Aiemmin: side-ehto $r = \ell = \text{vakio} \Rightarrow$ yleistetty koordinaatti θ .

Pitäydytään nyt koordinaateissa (r, θ) .

Side-ehto (1 kpl) $f(r, \theta) = r - \ell = 0$

Val. $y_1 = \theta$ riippumaton ja $y_2 = r$ riippuva koordinaatti.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} - \frac{\partial L}{\partial y_j} = \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_j} \quad \text{Nyt } j = 1, 2 \text{ ja } k = 1, \text{ joten}$$

$$f(r, \theta) = r - \ell = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mr^2 \ddot{\theta} + mgr \sin \theta = 0 \\ m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta = \lambda \end{cases}$$

Käytetään vielä side-ehtoa $r = \ell \Rightarrow \dot{r} = 0 = \ddot{r} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + (g/\ell) \sin \theta = 0 & \text{tuttu liikeyhtälö} \\ \lambda = -m(\ell \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta) & \text{sidostoivoima} \end{cases}$$

$-\lambda$ on tietenkin Newtonin mekaniikan yhteydessä vastaan tullut jännitysvoima J

Esim. Hiukkanen paraboloidilla

Vapaa ($g = 0$) hiukkanen + sidosehto:
rata rajoitettu paraboloidin pinnalle

$$z = \frac{1}{2}a(x^2 + y^2), \text{ missä } a \text{ on vakio}$$

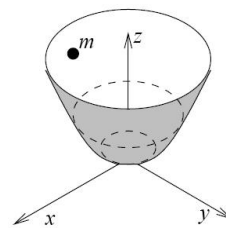
$$\therefore f(x, y, z) = \frac{1}{2}a(x^2 + y^2) - z = 0$$

$$\text{Val. } (r, \theta, z): \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$f = \frac{1}{2}ar^2 - z, \quad U = 0, \quad L = T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} \quad \left| \quad \begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial r} = ar; & \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0; & \frac{\partial f}{\partial z} = -1; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}); & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \\ \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2; & \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0; & \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

$(q_j) = (r, \theta, z)$



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = \lambda ar = F_r^{(s)} \\ m \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 = F_\theta^{(s)} \\ m\ddot{z} = -\lambda = F_z^{(s)} \\ z = \frac{1}{2}ar^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mr^2\dot{\theta} = l_z \\ m\ddot{r} - \frac{l_z^2}{mr^3} = \lambda ar \\ ma(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) = -\lambda \end{cases}$$

$$E = T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m \left[(1 + a^2r^2)\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{m^2r^2} \right]$$

$$m\dot{r}^2 = \frac{2E - \frac{l_z^2}{mr^2}}{1 + a^2r^2}; \quad \lambda = -a \frac{m\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{mr^2}}{1 + a^2r^2} = -a \frac{2E + \frac{a^2l_z^2}{m}}{(1 + a^2r^2)^2}$$

Sopii mainiosti yrittää löytää nämä ilman Lagrangen formalismia.
Ei se toki mahdotonta ole!

Pyykkinaru eli Lagrangen kertojat statiikassa

Mikä on roikkuvan pyykkinarun muoto?

Narun pituus D , ripustuspisteiden etäisyys $2a < D$.

Hamiltonin periaatteessa vaaditaan $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ stationaariseksi.

Nyt $T = 0$, $L = -U = -E$, joten vaatimuksena on E :n ääriarvo

$$dE = dU = gy dm = gy (\rho ds) \Rightarrow$$

$$E = \int_{(-a, y_1)}^{(+a, y_1)} g\rho y ds = g\rho \int_{-a}^{+a} y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx,$$

missä ρ on narun massatiheys (kg/m) ja $\dot{y} = dy/dx$.

$$\text{Sidos: } D = \int_{(-a, y_1)}^{(+a, y_1)} ds = \int_{-a}^{+a} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx = \text{vakio}$$

$$\delta D = 0$$

Koska energian ääriarvo saadaan, kun $\delta E = 0$, voidaan sidosehto huomioida vaatimalla $\delta E + \lambda' \delta D = 0$

eli etsimällä integraalin (merk. $\lambda' = \lambda \rho g$)

$$I = \rho g \int_{-a}^{+a} (y + \lambda) \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

ääriarvo (koska $\delta I = \delta E + \lambda' \delta D$). Tässä λ on siis vakio.

Euler: $\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$; $f = (y + \lambda) \sqrt{1 + \dot{y}^2}$

$$\Rightarrow (y + \lambda) \ddot{y} = 1 + \dot{y}^2 \quad \text{Tässä siis differentiaaliyhtälö ratkaistavaksi}$$

Huomataan: $\frac{d}{dx}(1 + \dot{y}^2) = 2\dot{y}\ddot{y}$ joten veivataan diff. yhtälö muotoon

$$\frac{2\dot{y}\ddot{y}}{1 + \dot{y}^2} = \frac{2\dot{y}}{y + \lambda}$$

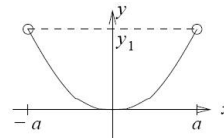
$$\ln(1 + \dot{y}^2) = \ln(y + \lambda)^2 + \ln C$$

$$1 + \dot{y}^2 = C(y + \lambda)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C(y + \lambda)^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C(y + \lambda)^2 - 1}$$

Val. $y(0) = 0$.



Symmetrian vuoksi $dy/dx = 0$, kun $x = 0 \Rightarrow C\lambda^2 = 1$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(1 + y/\lambda)^2 - 1}}$$

Valitsemalla $u = 1 + y/\lambda$

$$\frac{x}{\lambda} = \int_1^{1+y/\lambda} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \cosh^{-1} \left(1 + \frac{y}{\lambda} \right) \Rightarrow \frac{y}{\lambda} = \cosh \frac{x}{\lambda} - 1 \quad \text{ketjukäyrä}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{\lambda}} = \cosh \frac{x}{\lambda}$$

$$\Rightarrow D = \lambda \int_{-a/\lambda}^{+a/\lambda} \cosh u' du' = 2\lambda \sinh \frac{a}{\lambda} \stackrel{a \ll \lambda}{\approx} 2a + \frac{2a}{3!} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda(a, D)$$

Lähtökohta: $\delta E + \lambda' \delta D = 0 \Rightarrow \text{Jännitys} = \lambda' = \lambda \rho g$.

Huom. $\lambda \rightarrow \infty$, kun $2a \rightarrow D$.

Kanoniset impulssit

Aluksi vähän terminologiaa

- liikemäärä (momentum)
- liikemäärämomentti (usein impulssimomentti; angular momentum)
- kanoninen impulssi (canonical momentum)

Määritellään **kanoniset impulssit**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Lagrangen yhtälöissä siis $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$, joten $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

Esim. Massapiste konservatiivisessa kentässä

karteesisille koordinaateille $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$

$$\Rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad p_y = m\dot{y}; \quad p_z = m\dot{z}$$

keskeisliike ratatason napakoordinaateissa $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$

$$\Rightarrow p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = (\mathbf{r} \times m\mathbf{v})_z = l_z$$

Kanoniset impulssit sähkömagneettisessa kentässä

SM-kenttä annetaan potentiaaliensa avulla:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Hiukkasen potentiaalifunktio tuolloin: $U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = q(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) - q\Phi$$

Kanoniset impulssit ovat siis (\mathbf{A} ja Φ eivät riipu nopeudesta)

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x, \quad p_y = m\dot{y} + qA_y, \quad p_z = m\dot{z} + qA_z$$

Tärkeä tulos!

SM kentällä itsellään on liikemäärää, joka pitää ottaa huomioon Newtonin lakeja sovellettaessa.

Sykliset koordinaatit

Sykliseksi koordinaatiksi kutsutaan yleistettyä koordinaattia q_j , joka ei esiinny Lagrangen funktiossa:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{Tällöin LY} \Rightarrow \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

syklisen koordinaatin kanoninen impulssi on liikevakio.

Fysiikassa yleisesti:

- systeemin invarianssi muunnoksessa \Leftrightarrow säilymlaki
- systeemissä vallitseva symmetria \Leftrightarrow säilymlaki

Esim. vapaa hiukkanen $L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

Translaatioinvarianssi: L säilyy siirroksissa $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$, missä \mathbf{a} vakio

Kaikki karteesiset koordinaatit syklisiä: $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z} = 0$

\Rightarrow vastaavat kanoniset impulssit $p_i = m\dot{x}_i$ kaikki liikevakioita

Mutta huom. sylinterikoordinaateissa $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$

φ ja z syklisiä $\Rightarrow p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ ja $p_z = m\dot{z}$ liikevakioita,

mutta $p_r = m\dot{r}$ noudattaa yhtälöä $\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 = \frac{p_\varphi^2}{mr^3}$

Syklisten koordinaattien määrä riippuu siis valitusta koordinaatistosta.

Useimmiten kannattaa etsiä semmoista koordinaatistoa, jossa on mahdollisimman monta syklistä koordinaattia. **SYMMETRIAT!**

Keskeispotentiaalin tapauksessa $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

joten karteesisissa koordinaateissa ei syklisiä ole.

Pallokoordinaateissa (r, φ, θ)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r), \text{ jossa } \varphi \text{ on syklinen } \Rightarrow$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad \text{on liikevakio.}$$

Tasoliike \Rightarrow val. $\theta = \pi/2$, jolloin $p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi} = l$

\Rightarrow liikemäärämomentin säilymlaki

Huom. $l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$

$$\begin{aligned} &= m[r \sin \theta \cos \varphi \frac{d}{dt}(r \sin \theta \sin \varphi) \\ &\quad - r \sin \theta \sin \varphi \frac{d}{dt}(r \sin \theta \cos \varphi)] \\ &= mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = p_\varphi \end{aligned}$$

Eli p_φ on L :n z -komponentti huolimatta ratatason valinnasta.

Mekaaninen similariteetti

$$L = L(q, \dot{q}, t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \text{ antaa radan.}$$

Selvästi $\tilde{L} = \alpha L$ antaa saman radan, kun α on vakio.

\Rightarrow tietoa liikkeestä rataa integroimatta!

Ol. $L = T - U$, missä U on k :n asteen homogeeninen funktio:

$$U(ax_1, \dots, ax_n) = a^k U(x_1, \dots, x_n); \quad a \text{ vakio.}$$

Skaalataan koordinaatit ja aika:

$$x_i \rightarrow \tilde{x}_i = ax_i; \quad t \rightarrow \tilde{t} = bt \quad \Rightarrow \quad v_i \rightarrow \tilde{v}_i = \frac{a}{b} v_i$$

$$T \rightarrow \tilde{T} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 T \quad U \rightarrow \tilde{U} = a^k U$$

$$\text{Vaaditaan } \tilde{T}/\tilde{U} = T/U \text{ jolloin } a^k = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow b = a^{1-k/2}$$

$$\text{ja } L \rightarrow \tilde{L} = a^k L$$

Pienoismallikoe ($a < 1$)

$$\begin{cases} \tilde{l} = al \\ \tilde{t} = bt = a^{1-k/2}t \end{cases} \Rightarrow \frac{\tilde{t}}{t} = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^{1-k/2} \text{ ja } \frac{\tilde{v}}{v} = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^{k/2}$$

\Rightarrow potentiaalia U vastaavien voimien vaikutus systeemiin

Esim. 1. Potentiaali $U = Cx^2$ (harmoninen oskillaattori)

$$U(ax) = Ca^2x^2 = a^2U(x) \Rightarrow k = 2$$

$$\frac{\tilde{t}}{t} = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^{1-k/2} = 1 \text{ eli värähdysaika ei riipu amplitudista}$$

$$\frac{\tilde{E}}{E} = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^k = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^2 \text{ eli energia verrannollinen amplitudin neliöön}$$

Esim. 2. Potentiaali $U = Cr^{-1}$ (Keplerin liike)

$$U(ar) = a^{-1}C/r = a^{-1}U(r) \Rightarrow k = -1$$

$$\frac{\tilde{t}}{t} = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^{1-k/2} = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^{3/2} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\tilde{t}}{t}\right)^2 = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^3}$$

Tämähän on Keplerin 3. laki, joka löytyi siis ilman varsinaista laskemista!

Esim. 3. Potentiaali $U = Cz$ (hitu homog. gravitaatiokentässä)

$$U(az) = aU(z) \Rightarrow k = 1$$

$$\frac{\tilde{t}}{t} = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^{1-k/2} = \sqrt{\frac{\tilde{l}}{l}}$$

Eli heilurin periodi on verrannollinen varren pituuteen

Dimensioanalyysiä

Esim. Ilmakehässä räjähtävän ydinpommin energian arvioiminen

Oletetaan pistemäinen räjähdys. Paineaallon säteeseen vaikuttavat E , ρ , t

Ol. similaarisuus:

$$r = CE^a t^b \rho^c \quad (C \text{ dimensioton vakio})$$

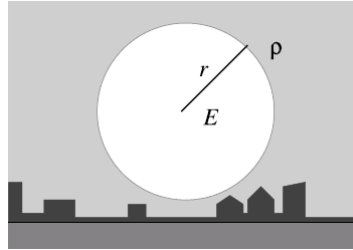
$$[r] \equiv L, \quad [t] \equiv T, \quad [\rho] \equiv M$$

$$\Rightarrow [E] = \frac{ML^2}{T^2}; \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}$$

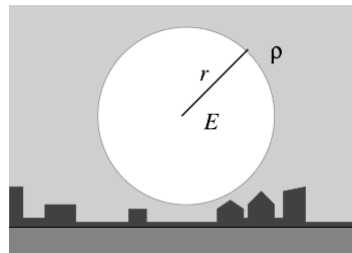
$$\Rightarrow L = [r] = [E]^a [t]^b [\rho]^c = M^{a+c} L^{2a-3c} T^{-2a+b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ 2a - 3c = 1 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/5 \\ b = 2/5 \\ c = -1/5 \end{cases}$$

$$r = CE^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}$$



$$r = CE^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}$$



G.I. Taylor: Shokkifysiikka $\Rightarrow C \approx 1$.

Mittaus $\Rightarrow r(15 \text{ ms}) \approx 300 \text{ m}$, $\rho \approx 1,3 \text{ kg m}^{-3}$

$$\Rightarrow E \approx \frac{\rho}{t^2} r^5 = 1,4 \cdot 10^{16} \text{ J} \quad \text{Oikein!}$$

Vrt. Loviisa 1:n ($P = 440 \text{ MW}$) vuosituotanto $\approx 1,14 \cdot 10^{16} \text{ J}$

Miksi taivas on sininen?

Taivaalta tuleva valo siroaa ilman molekyyleistä.

Ol. Auringosta tulevan valon amplitudi = E_i .

Intensiteetti

Molekyylin sirottaman valon amplitudi = $E_s = \alpha E_i$.

$$I \propto E^2$$

Rayleigh: aaltoliikeoppi

$$\Rightarrow \alpha \propto V = \frac{4\pi}{3}a^3, \text{ missä } a \text{ molekyylin säde.}$$

Energiaperiaate $\Rightarrow E_s \propto 1/r$

Lisäksi $I_s \propto E_s^2$ voi riippua aallonpituudesta, joten

$I_s = C I_i \frac{a^6}{r^2} \lambda^b$ missä $I_i \propto E_i^2$ on tulevan valon intensiteetti ja C dimensioton vakio.

$$\therefore [I_s] = [I_i] \frac{[a]^6}{[r]^2} [\lambda]^b \quad \text{joten } [a]^6 [\lambda]^b / [r]^2 = L^{4+b} \text{ on dimensioton:}$$

$$\Rightarrow b + 4 = 0$$

$$\Rightarrow I \propto \lambda^{-4} I_i$$

eli lyhytaaltainen (sininen) väri on sironneessa valossa vallitseva.