Jäykän kappaleen liike

Tähän asti on tarkasteltu ”massapistemekaniikkaa”: $m_i,\ \boldsymbol{r}_i,\ \boldsymbol{v}_i$

Oikeasti fysikaaliset systeemit ovat äärellisen kokoisia, esim.

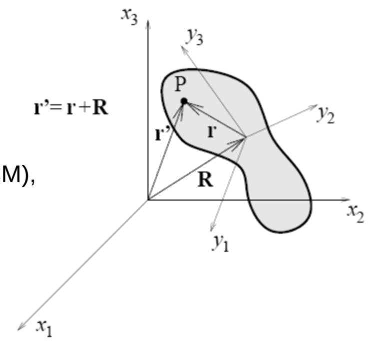
- jäykät kappaleet $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| = c_{ij} =$ vakio $\quad \forall\ i, j$
- elastiset kappaleet
- nesteet, kaasut, plasmat

Täysin jäykkiä kappaleita ei ole!

- lämmön, äänen, sähkön johtavuus
- kvanttitaso

Jäykkä kappale hyvä approksimaatio, kun
$v_i \ll$ vuorovaikutuksen etenemisnopeus
$\Rightarrow$ selvästi ongelmia, kun $v_i \to c$

Koordinaatiston valinta
(tärkeä tehdä fiksusti!)



Inertiaalikoordinaatisto $\{x\}$

Kappaleen (mahdollisesti ei-inertiaalinen) lepokoordinaatisto $\{y\}$

Jos valitaan $\{y\}$:n origoksi massakeskipiste (CM),
$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i = 0$$

Aiempi tulos:
$$(\dot{\boldsymbol{r}}')_x = (\dot{\boldsymbol{R}})_x + \underbrace{(\dot{\boldsymbol{r}})_y}_{0} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

0 , koska kappale on jäykkä

Näin ollen jäykälle kappaleelle $(\dot{\boldsymbol{r}}')_x = (\dot{\boldsymbol{R}})_x + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

Huom. tämä ei riipu CM:n valinnasta origoksi.
Valinta on usein (muttei aina!) hyödyllinen

Pyörimisenergia

Tavoitteena määrittää
- Lagrangen funktio jäykälle kappaleelle
- hitausmomentit

Ol. kpl muodostuu erillisitä massapisteistä m_i

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\boldsymbol{r}}'_i)^2_x = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \sum_i m_i\dot{\boldsymbol{R}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)^2$$

Tässä tietysti $\boldsymbol{R}$ ja $\boldsymbol{\omega}$ ovat samat kaikille i. Merk. $\sum_i m_i = M$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{R}}^2 = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2$$

ja $$\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{R}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i) = \dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\underbrace{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}_{=0 \quad \text{(CM)}} = 0$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$$

$$\Rightarrow \quad (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)^2 = \omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sum_i m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i[\omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i)^2]$$

$$\therefore \; T = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2}_{T_{\mathrm{CM}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i[\omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i)^2]}_{T_{\mathrm{rot}}}$$

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[\sum_{j=1}^{3}\omega_j^2\sum_{k=1}^{3}y_{ik}^2 - \left(\sum_{j=1}^{3}\omega_j y_{ij}\right)\left(\sum_{k=1}^{3}\omega_k y_{ik}\right)\right]$$

Yksinkertaistetaan merkintöjä jättämällä pois hiukkaset numeroiva indeksi

$$y_{ij} \to y_j; \quad \sum_i m_i[\ldots] \to \sum m[\ldots]$$

Ja ottamalla käyttöön Einsteinin summaussääntö:
Toistetun indeksi yli summataan automaattisesti

$$\sum_{j=1}^{3}\omega_j^2 \to \omega_j\omega_j = \omega_j^2; \quad \sum_{j=1}^{3}\omega_j y_j \to \omega_j y_j$$

Muodostetaan hitaustensori

$$
\begin{aligned}
T_{\mathrm{rot}} &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\sum_{j=1}^{3}\omega_j^2 \sum_{k=1}^{3} y_{ik}^2 - \left(\sum_{j=1}^{3}\omega_j y_{ij}\right)\left(\sum_{k=1}^{3}\omega_k y_{ik}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum m\left[(\omega_i^2)(y_j^2) - (\omega_i y_i)(\omega_k y_k)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum m\left[(\omega_i\omega_k\delta_{ik})(y_j^2) - \omega_i\omega_k\, y_i y_k\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum m\,\omega_i\omega_k\left[\delta_{ik}(y_j^2) - y_i y_k\right] \\
&= \frac{1}{2}\omega_i\omega_k \underbrace{\sum m\left[(y_j^2)\delta_{ik} - y_i y_k\right]}_{\equiv I_{ik}} \\
&= \frac{1}{2} I_{ik}\,\omega_i\omega_k
\end{aligned}
$$

<u>Hitaustensori</u> $I_{ik} = \sum m(y_j^2\delta_{ik} - y_i y_k)$ (muista: $y_j^2 = \sum_j y_j^2$)

Lagrangen funktio

Saatu hitaustensori $I_{ik} = \sum m(y_j^2\delta_{ik} - y_i y_k)$ on 2. kl:n tensori, jonka komponentit koordinaatistossa $\{y\}$ ovat

$$
\begin{aligned}
(I_{ik}) &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum m(y_j^2 - y_1^2) & -\sum m y_1 y_2 & -\sum m y_1 y_3 \\ -\sum m y_2 y_1 & \sum m(y_j^2 - y_2^2) & -\sum m y_2 y_3 \\ -\sum m y_3 y_1 & -\sum m y_3 y_2 & \sum m(y_j^2 - y_3^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Merkitään $\mathsf{I} = (I_{ik})$

I:n fysikaalinen dimensio $[\mathsf{I}] = ML^2$

I symmetrinen $I_{ik} = I_{ki}$

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\omega_i I_{ik}\omega_k \\
&= \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathsf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{L = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathsf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} - U}
$$

$$
U = \sum_i U_i(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_i)
$$

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} - U$$

Sidosehdot: $\boldsymbol{r}_i =$ vakio $\{y\}$:ssä $\Rightarrow$ $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(\varphi, \psi, \theta)$ $\{x\}$:ssä

$\Rightarrow$ Lagrangen funktiossa kuusi muuttujaa

$\boldsymbol{R},\ (\varphi, \psi, \theta)$ (paikka ja asento)

sekä niiden aikaderivaatat

$\dot{\boldsymbol{R}},\ (\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}) \leftarrow$ ($\boldsymbol{\omega}$:n komponenteista)

Tensoreilla laskemisesta, eli mitä liittyy lausekkeeseen

$$\omega_i \omega_j I_{ij} = \omega_i I_{ij} \omega_j = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

vektori $\cdot$ tensori $=$ vektori (' $\cdot$ ' $=$ pistetulo)

$(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{I})_j \quad = \quad \omega_i I_{ij} = a_j$ summaus *i*:n yli!

tensori $\cdot$ vektori $=$ vektori

$(\mathsf{I} \cdot \boldsymbol{\omega})_j \quad = \quad I_{ji} \omega_i = \omega_i I_{ji} = \omega_i I_{ij} = a_j$

Huom: vektorin ja tensorin pistetulo ei ole vaihdannainen muille kuin symmetrisille tensoreille (kuten I)!

vektori $\cdot$ tensori $\cdot$ vektori $=$ vektori $\cdot$ vektori $=$ skalaari

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{I}) \cdot \boldsymbol{\omega} = a_j \omega_j \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathsf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \omega_i a_i \end{aligned}$$

Karteesisen tensorin laskemisen voi aina palauttaa matriisilaskennaksi annetussa kooridinaatistossa

$$\begin{aligned} \underbrace{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathsf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}}_{\text{tensorinotaatio}} &= (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \cdot \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\boldsymbol{\omega}^T \cdot (I_{ik}) \cdot \boldsymbol{\omega}}_{\text{matriisinotaatio}} \end{aligned}$$

Tensorit, samoin kuin vektorit (esim. nopeus), ovat matemaattinen otuksia, joiden olemassaolo ei riipu koordinaatistosta, mutta niiden komponentit riippuvat!

Hitausmomentit ja hitaustulot

Olkoon $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{\omega}$:n suuntainen yksikkövektori: $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{n}$

$\Rightarrow \ T_{\rm rot} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot \mathsf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\omega^2\boldsymbol{n}\cdot\mathsf{I}\cdot\boldsymbol{n} \equiv \frac{1}{2}I\omega^2$

Tässä $I = \boldsymbol{n}\cdot\mathsf{I}\cdot\boldsymbol{n} = \sum m[r^2 - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})^2]$

on kappaleen hitausmomentti pyörimisakselin suhteen.

Hitaustensorin komponentit

$$(I_{ik}) = \begin{pmatrix} \sum m(y_2^2+y_3^2) & -\sum my_1y_2 & -\sum my_1y_3 \\ -\sum my_2y_1 & \sum m(y_1^2+y_3^2) & -\sum my_2y_3 \\ -\sum my_3y_1 & -\sum my_3y_2 & \sum m(y_1^2+y_2^2) \end{pmatrix}$$

Diagonaalielementit: Hitausmomentit koordinaattiakselien suhteen

Ei-diagon.elementit: Hitaustulot

Jatkuvalle aineelle $\sum m \to \int dV\,\rho(\boldsymbol{r}) \ \Rightarrow \ I_{ik} = \int_V d^3r\,\rho(\boldsymbol{r})(r^2\delta_{ik} - r_ir_k)$

ja tällöinkin $T_{\rm rot} = \dfrac{1}{2}I_{ik}\omega_i\omega_k$ (summaus!)

Pääakselikoordinaatisto

Koska $I_{ik} \in \mathbb{R}$ ja $I_{ik} = I_{ki}$, (I_{ik}) diagonalisoituu eli

$\exists$ koordinaatisto, jossa $(I_{ik}) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ pääakselikoordinaatisto

Hitausmomentit I_j pääakselien suhteen ovat kappaleen päähitausmomentit

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2),$$

missä $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ovat $\boldsymbol{\omega}$:n komponentit pääakselikoordinaatistossa.

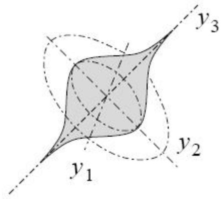
$I_1 = I_2 = I_3 \quad \Rightarrow$ kpl on ns. pallohyrrä

$I_1 = I_2 \neq I_3 \quad \Rightarrow$ symmetrinen hyrrä

Vihje: Mieti aina etukäteen onko olemassa selviä symmetrioita!

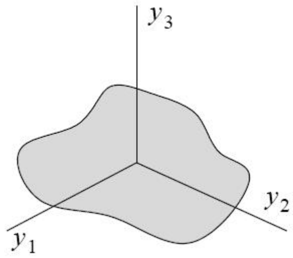
Tarkastellaan homogeenista kappaletta

- Jos kappaleella on symmetria-akseli, niin CM ja yksi pääakseleista on tällä suoralla
- Jos on olemassa symmetria-akselia vastaan kohtisuora symmetriataso, niin loput pääakselit ovat tässä tasossa



Esim. 2-ulotteinen kpl (tasossa), $y_3 = 0$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \sum m y_2^2$$
$$I_2 = \sum m y_1^2$$
$$I_3 = \sum m (y_1^2 + y_2^2)$$
$$\Rightarrow \quad I_1 + I_2 = I_3$$



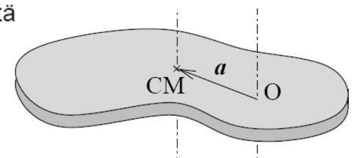
Steinerin sääntö

Esim. autonrengas epätasapainossa $\Rightarrow$ CM ei pyörimisakselilla

Korjaus: lisätään sopivasti painoja $\Rightarrow$ CM pyörimisakselilla

Siirros $\boldsymbol{a}$ ($\{y\}$:ssä) $\boxed{(I_{\boldsymbol{a}})_{ik} = I_{ik} + M(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)}$

Tod: Merk. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}'$, missä $\boldsymbol{r}'$ mitataan CM:stä (eli $\boldsymbol{a}$ osoittaa tarkastelukoordinaatiston origosta CM:een)



$$\begin{aligned}(I_{\boldsymbol{a}})_{ik} &= \sum m(r^2\delta_{ik} - r_i r_k) \\ &= \sum m[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}')^2\delta_{ik} - (a_i + r_i')(a_k + r_k')] \\ &= \sum m[(\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}'^2)\delta_{ik} - a_i a_k - r_i' a_k - a_i r_k' - r_i' r_k'] \\ &= \sum m(\boldsymbol{a}^2\delta_{ik} - a_i a_k) + \sum m(\boldsymbol{r}'^2\delta_{ik} - r_i' r_k') \\ &\quad + \underbrace{\sum m(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}'\delta_{ik} - r_i' a_k - a_i r_k')}_{=0} \\ &= I_{ik} + M(\boldsymbol{a}^2\delta_{ik} - a_i a_k). \ \square\end{aligned}$$

Hitausellipsoidi

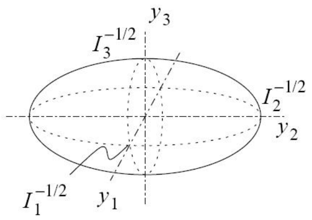
Määritellään toisen asteen pinta $\boldsymbol{r} \cdot \mathsf{I} \cdot \boldsymbol{r} = 1$

Yleisesti pinnan yhtälö on siis

$$I_{11}y_1^2 + I_{22}y_2^2 + I_{33}y_3^2 + 2I_{12}y_1y_2 + 2I_{13}y_1y_3 + 2I_{23}y_2y_3 = 1$$

Pääakselikoordinaatistossa $\frac{y_1^2}{I_1^{-1}} + \frac{y_2^2}{I_2^{-1}} + \frac{y_3^2}{I_3^{-1}} = 1$

eli pinta on ellipsoidi, jonka akselit ovat kappaleen pääakselit: Hitausellipsoidi



Homogeenisen pallon ja kuution hitausellipsoidit ovat pallopintoja.

Kappaleet ovat siis samanlaisia hyrräliikkeen kannalta eli pallohyrriä

Hyrrän liike

Liikemäärämomentti CM:n suhteen $\{x\}$:ssä

$$\boldsymbol{L} = \sum m\boldsymbol{r} \times (\dot{\boldsymbol{r}})_x \qquad \Big| \; (\dot{\boldsymbol{r}})_x = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$= \sum m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

$$= \sum m[r^2\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})]$$

Komponentit $\{y\}$:ssä (summaussääntö)

$$L_i = \sum m[y_j^2\omega_i - y_i(y_k\omega_k)] \qquad \Big| \; \omega_i = \omega_k\delta_{ik}$$

$$= \omega_k \sum m(y_j^2\delta_{ik} - y_iy_k)$$

$$= I_{ik}\omega_k$$

eli vektorina $\boldsymbol{L} = \mathsf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$

$\boldsymbol{L} = \mathsf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$

Jos $\{y\}$ on pääakselikoordinaatisto $\boldsymbol{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$

Yleisesti siis $\boldsymbol{L} \nparallel \boldsymbol{\omega}$

Poikkeuksia:

1) hyrrä on pallohyrrä ($I_1 = I_2 = I_3 = I$)

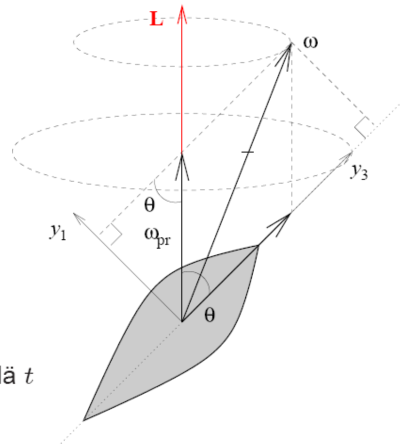
$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$

2) hyrrä on symmetrinen ($I_1 = I_2 \neq I_3$) ja $\omega_3 = 0$

$\boldsymbol{L} = I_1\boldsymbol{\omega}$

3) $\boldsymbol{\omega}$ on jonkin pääakselin suuntainen

Vapaan hyrrän prekessio



Oletukset:

O1: hyrrä symmetrinen $I_1 = I_2 \neq I_3$

O2: CM levossa $\{x\}$:ssä

O1 $\Rightarrow$ pääakselit $y_1, y_2 \perp y_3$ voidaan valita vapaasti

Val. hetk. t, $y_2 \perp (\boldsymbol{L}, y_3)$-taso

$\Rightarrow L_2 = 0$

$\boldsymbol{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) = (L_1, 0, L_3)$

$I_j \neq 0 \quad \forall\, j \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = L_2/I_2 = 0$ hetkellä t

t mielivaltainen $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega} \in (\boldsymbol{L}, y_3)$-taso $\quad \forall\, t$

O2 $\Rightarrow \forall\, \boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_3$: $(\dot{\boldsymbol{r}})_x = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = -\omega_1 r \boldsymbol{e}_2 \perp (\boldsymbol{L}, y_3)$-taso $\quad \Rightarrow$

y_3-akseli kiertää $\boldsymbol{L}$:ää kulmanopeudella $\quad \omega_{\rm pr} = \dfrac{|\dot{\boldsymbol{r}}|}{r\sin\theta} = \dfrac{\omega_1}{\sin\theta}$

Saatiin siis

(1) $\boldsymbol{\omega} \in (\boldsymbol{L}, y_3)$-taso $\quad \forall\ t$

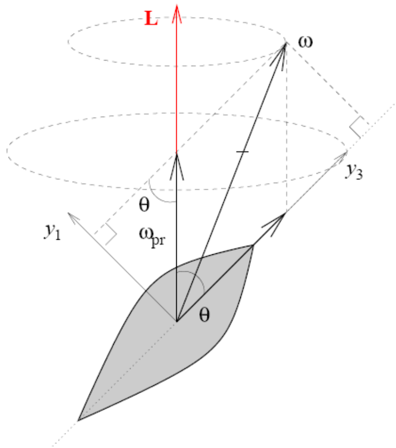
(2) $\omega_{\text{pr}} = \dfrac{|\dot{\boldsymbol{r}}|}{r \sin\theta} = \dfrac{\omega_1}{\sin\theta}$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega}$ kiertää $\boldsymbol{L}$:ää kulmanopeudella ω_{pr}

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_{\text{pr}} \sin\theta \\ \omega_1 = \dfrac{L_1}{I_1} = \dfrac{l \sin\theta}{I_1} \end{cases}$$

$\Rightarrow \omega_{\text{pr}} = \dfrac{l}{I_1}; \quad l = |\boldsymbol{L}|$

$L_3 = I_3\omega_3 \ \Rightarrow\ \omega_3 = \dfrac{L_3}{I_3} = \dfrac{l\cos\theta}{I_3}$



$\boldsymbol{\omega}$:n ja y_3:n yhteistä kiertoliikettä $\boldsymbol{L}$:n ympäri kutsutaan prekessioksi.

Hyrrän liikeyhtälöt

Hyrrällä on 6 vapausastetta ja niihin liittyvät liikemäärät

paikka	$\boldsymbol{R}$	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{P}$	kokonaisliikemäärä
asento	$\boldsymbol{e}_i$	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{L}$	liikemäärämomentti

Tarkastellaan liikeyhtälöitä Newtonin mekaniikassa koordinaatistossa $\{x\}$

Olkoon $\boldsymbol{f}$ kpl:n massapisteeseen (i) vaikuttava voima

$\boldsymbol{R}$: $\quad \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{f}; \quad \sum \boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{P} = M\dot{\boldsymbol{R}}$

$\Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{P}} = \sum \boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}$ (kokonaisvoima)

$\boldsymbol{e}_i$: $\quad (\dot{\boldsymbol{L}})_x = \sum \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{p}) = \underbrace{\sum \dot{\boldsymbol{r}}' \times \boldsymbol{p}}_{=0} + \sum \boldsymbol{r}' \times \dot{\boldsymbol{p}}$

$\quad = \sum \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{N}$ (vääntömomentti)

vaikka olisi $\boldsymbol{F} = 0$, voi olla $\boldsymbol{N} \neq 0$ (ns. voimapari)

Huom. Momentit riippuvat referenssipisteestä!

Esim. O_x:n siirros vektorilla $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{a}$

$\Rightarrow \boldsymbol{N} = \sum \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{f} = \sum \boldsymbol{r}'_{\boldsymbol{a}} \times \boldsymbol{f} + \sum \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}$

Eulerin yhtälöt

Siirrytään $\{x\}$:stä hyrrän koordinaatiostoon $\{y\}$: $\left.\frac{d}{dt}\right|_x = \left.\frac{d}{dt}\right|_y + \boldsymbol{\omega}\times$

Valitaan $\{y\}$:ksi pääakselikoordinaatiosto

$$\boldsymbol{N} = \left.\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right|_x = \left.\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right|_y + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{L}_1 + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L})_1 = N_1 \\ \dot{L}_2 + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L})_2 = N_2 \\ \dot{L}_3 + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L})_3 = N_3 \end{cases} \quad \{y\}\text{:ssä!}$$

$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L})_1 = \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 = \omega_2\omega_3 I_3 - \omega_3\omega_2 I_2 = \omega_2\omega_3(I_3 - I_2)$$
$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L})_2 = \omega_3 L_1 - \omega_1 L_3 = \omega_3\omega_1 I_1 - \omega_1\omega_3 I_3 = \omega_1\omega_3(I_1 - I_3)$$
$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L})_3 = \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 = \omega_1\omega_2 I_2 - \omega_2\omega_1 I_1 = \omega_1\omega_2(I_2 - I_1)$$

Saadaan Eulerin yhtälöt hyrrälle (taas Euler!):

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = N_1 & \text{(E1)} \\ I_2\dot{\omega}_2 - \omega_1\omega_3(I_3 - I_1) = N_2 & \text{(E2)} \\ I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = N_3 & \text{(E3)} \end{cases}$$

Ristituloja laskettaessa kannattaa usein käyttää nk. permutaatiosymbolia

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & i = j,\ i = k,\ j = k \\ 1 & ijk \text{ on 123:n parillinen permutaatio} \\ -1 & ijk \text{ on 123:n pariton permutaatio} \end{cases}$$

$\Rightarrow (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ijk}A_j B_k$ (summaussääntö)

$$\begin{cases} \dot{L}_1 + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L})_1 = N_1 \\ \dot{L}_2 + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L})_2 = N_2 \\ \dot{L}_3 + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L})_3 = N_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{L}_i + \epsilon_{ijk}\omega_j L_k = N_i$$

Ja Eulerin yhtälöt ovat muotoa $I_i\dot{\omega}_i + \epsilon_{ijk}\omega_j\omega_k I_k = N_i$

Vapaa symmetrinen hyrrä

vapaa ($\boldsymbol{N} = 0$), symmetrinen ($I_1 = I_2 \neq I_3$)

$$\begin{cases} I_1\dot\omega_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = N_1 = 0 & \text{(E1)} \\ I_2\dot\omega_2 - \omega_1\omega_3(I_3 - I_1) = N_2 = 0 & \text{(E2)} \\ I_3\dot\omega_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = N_3 = 0 & \text{(E3)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_3\dot\omega_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_3 = \text{vakio}$$

$$\begin{cases} \dot\omega_1 = -\dfrac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3\omega_2 = -\Omega\omega_2 \\ \dot\omega_2 = +\dfrac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_1\omega_3 = +\Omega\omega_1 \end{cases} \qquad \Omega \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3 = \text{vakio}$$

Ratkaistaan kompleksitasossa $z = \omega_1 + i\omega_2 \;\Rightarrow$

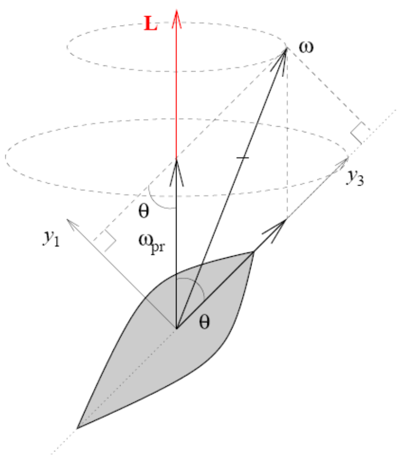
$$\dot z = \dot\omega_1 + i\dot\omega_2 = -\Omega\omega_2 + i\Omega\omega_1 = i\Omega z \qquad \Rightarrow \; z = Ae^{i(\Omega t + \delta)} \quad A, \delta \in \mathbb{R}$$

val. $\delta = 0$
(ajan nollakohta) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \omega_1 = \omega_\perp \cos\Omega t \\ \omega_2 = \omega_\perp \sin\Omega t \end{cases}$ missä $\omega_\perp \equiv \sqrt{\omega^2 - \omega_3^2} = \text{vakio}$

$\{x\}$:ssä $\boldsymbol{e}_3$ ja $\boldsymbol{\omega}$ kiertävät vakiovektoria $\boldsymbol{L}$ (kulmanopeudella $\omega_{\rm pr}$)

$\{y\}$:ssä $\boldsymbol{\omega}$ ja $\boldsymbol{L}$ kiertävät vakiovektoria $\boldsymbol{e}_3$ kulmanopeudella Ω

$$\Omega \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3 = \text{vakio}$$



<u>Esim</u>. maapallo: $(I_3 - I_1)/I_1 \approx 0{,}00307$

$\Rightarrow \;\; \Omega \approx \omega_3/306$

$\Rightarrow \;\; T_{\rm pr} \approx 306\ \mathrm{d} \approx 10\ \mathrm{kk}$ (Maasta nähtynä: näenn. latitudi oskilloi!)

Havaittu amplitudi n. 10 m, mutta jakso n. 420 vrk. (!?)

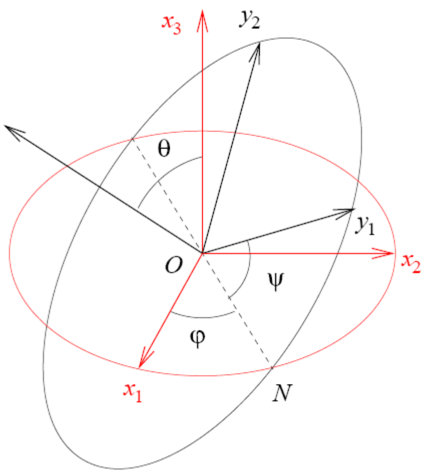
Eulerin kulmat

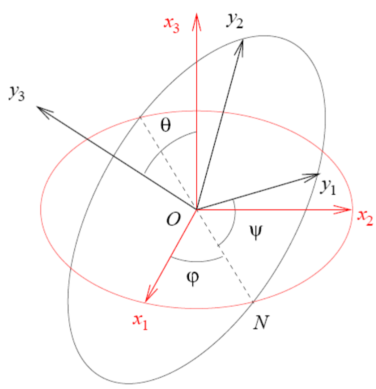
Koord. $\{x\}$ ja $\{y\}$

- yhteinen origo O
- tasojen x_1x_2 ja y_1y_2 leikkaus: solmuviiva ON

Eulerin kulmat

$$
\begin{aligned}
\theta &= \sphericalangle(x_3, y_3) && \in [0, \pi] \\
\varphi &= \sphericalangle(x_1, ON) && \in [0, 2\pi] \\
\psi &= \sphericalangle(y_1, ON) && \in [0, 2\pi]
\end{aligned}
$$





Ongelma:

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathcal{R} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
$$

Ratkaistava $\mathcal{R}$!

Raakaa voimaa käyttämällä:

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi)} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \rho \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{R}^{(\xi)}(\theta)} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \rho' \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{R}^{(\rho')}(\psi)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}
$$

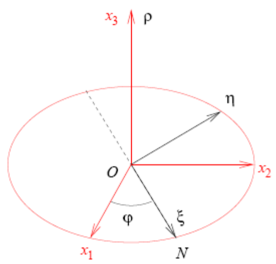
$$
\mathcal{R} = \mathcal{R}^{(\rho')}(\psi) \cdot \mathcal{R}^{(\xi)}(\theta) \cdot \mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi)
$$

$$\boldsymbol{y} = \mathcal{R}^{(\rho')}(\psi) \cdot \mathcal{R}^{(\xi)}(\theta) \cdot \mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi) \cdot \boldsymbol{x} = \mathcal{R} \cdot \boldsymbol{x}$$

1. vaihe:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \rho \end{pmatrix} = \mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

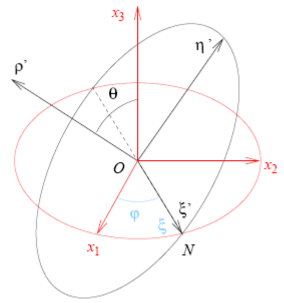
$$\mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2. vaihe:

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \rho' \end{pmatrix} = \mathcal{R}^{(\xi)}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \rho \end{pmatrix}$$

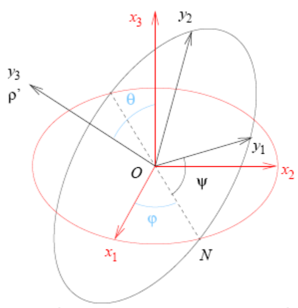
$$\mathcal{R}^{(\xi)}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



3. vaihe:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathcal{R}^{(\rho')}(\psi) \cdot \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \rho' \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}^{(\rho')}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathcal{R}^{(\xi)}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{(\rho')}(\psi) \cdot \mathcal{R}^{(\xi)}(\theta) \cdot \mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Kulmanopeus Eulerin kulmien avulla

Saatiin $\boldsymbol{y} = \mathcal{R} \cdot \boldsymbol{x}$. Helppo osoittaa, että $\boldsymbol{x} = \mathcal{R}^T \cdot \boldsymbol{y}$

Kulmanopeusmatriisi Ω (parin viikon takaa)

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \Omega = \mathcal{T}^T \cdot \dot{\mathcal{T}} \qquad \text{kun } \boldsymbol{x} = \mathcal{T} \cdot \boldsymbol{y}$$

$$\Omega = \mathcal{R} \cdot \dot{\mathcal{R}}^T \quad \Rightarrow \quad \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$$

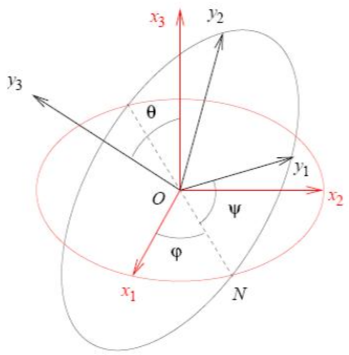
$\boldsymbol{\omega}$ saadaan myös suoraan kuvasta:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k} + \dot{\theta}\boldsymbol{e}_{ON} + \dot{\psi}\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{k} = \mathcal{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\psi \\ \sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_{ON} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$



Vapaan hyrrän prekessiosta

Saatiin siis

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

<u>Ol</u>. vapaa symmetrinen hyrrä

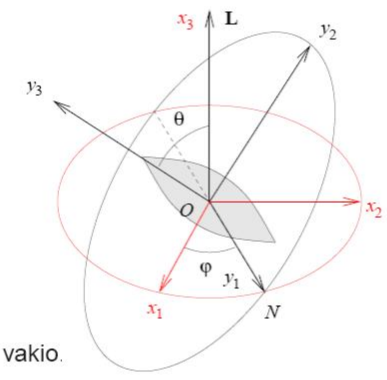
$$\boldsymbol{L} = (I_1\omega_1, I_1\omega_2, I_3\omega_3)$$

<u>Valitaan</u>

1) $x_3 \parallel \boldsymbol{L}$ (vakio $\{x\}$:ssä)

2) hetkellä t: $\psi = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} L_1 = I_1\dot{\theta} & = 0 \\ L_2 = I_1\dot{\varphi}\sin\theta & = l\sin\theta \\ L_3 = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) & = l\cos\theta \end{cases} \qquad \theta = \text{vakio.}$$



Hyrrän kulmanopeus oman akselinsa ympäri $\omega_3 = \dfrac{L_3}{I_3} = \dfrac{l\cos\theta}{I_3}$

ja prekession kulmanopeus $\omega_{\text{pr}} = \dot{\varphi} = \dfrac{l}{I_1}$

Lagrangen hyrrä

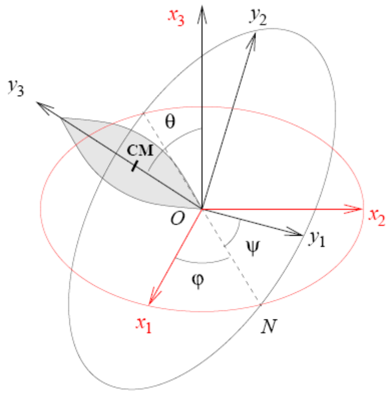
Massiivinen, symmetrinen hyrrä, jonka symmetria-akselin yksi piste on kiinnitetty

Kiinteä piste (sidos): –3 vapausastetta

Jää 3 vapausastetta, esim. Eulerin kulmat!

Ol. kiintä piste $x_1 x_2$-tasossa (origo) ja $x_3 \parallel \mathbf{g}$

Ei kitkaa!



Päähitausmomentit CM:n suhteen:

$I_1, I_2, I_3 \quad (I_2 = I_1)$

Steiner: $I^0_{ik} = I_{ik} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$,

missä $\mathbf{a} = -h\mathbf{e}_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1^0 = I_1 + mh^2 \\ I_2^0 = I_1 + mh^2 \\ I_3^0 = I_3 \end{cases}$$ päähitausmomentit O:n suhteen

Lagrangen funktio

$$L = \frac{1}{2}(I_1^0\omega_1^2 + I_2^0\omega_2^2 + I_3^0\omega_3^2) - mg\,h\cos\theta$$

$$\begin{cases} I_1^0 = I_1 + mh^2 \\ I_2^0 = I_1 + mh^2 \\ I_3^0 = I_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi \\ \omega_2 = \dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi \\ \omega_3 = \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi \end{cases} \qquad \Rightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 = \sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + \dot\theta^2$$

$$L = \frac{1}{2}I_1^0(\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 + \dot\theta^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2 - mgh\cos\theta$$

L ei riipu ψ:stä eikä φ:stä (syklisiä)

$$\Rightarrow \begin{cases} p_\psi = \dfrac{\partial L}{\partial\dot\psi} \\ p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi} \end{cases}$$ liikevakioita

$p_\psi = I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = I_3\omega_3 = L_3 =$ vakio

$p_\varphi = (I_1^0\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot\varphi + I_3\cos\theta\dot\psi = L_{x_3} =$ vakio liikemäärämomentin 3-komponentti $\{y\}$:ssä

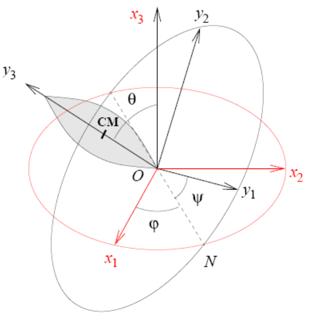
$$p_\psi = I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = I_3\omega_3 = L_3 = \text{vakio}$$
$$p_\varphi = (I_1^0\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot\varphi + I_3\cos\theta\dot\psi = L_{x_3} = \text{vakio}$$

liikemäärämomentin projektio x_3-akselille

Ratkaistaan $\dot\varphi$ ja $\dot\psi$ θ:n funktiona:

$$\dot\varphi = \frac{L_{x_3} - L_3\cos\theta}{I_1^0\sin^2\theta}$$

$$\dot\psi = \frac{L_3}{I_3} - \cos\theta\frac{L_{x_3} - L_3\cos\theta}{I_1^0\sin^2\theta}$$



3. liikevakio on kokonaisenergia:

$E = T + U = $ vakio

$$E = \frac{1}{2}I_1^0(\sin^2\theta\dot\varphi^2 + \dot\theta^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2 + mgh\cos\theta$$
$$= \frac{1}{2}I_1^0\dot\theta^2 + \frac{(L_{x_3} - L_3\cos\theta)^2}{2I_1^0\sin^2\theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mgh\cos\theta$$

$$E = \frac{1}{2}I_1^0\dot\theta^2 + \frac{(L_{x_3} - L_3\cos\theta)^2}{2I_1^0\sin^2\theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mgh\cos\theta$$

$$\Rightarrow \dot\theta = \pm\sqrt{\frac{2}{I_1^0}\left(E - \frac{L_3^2}{2I_3} - mgh\cos\theta\right) - \frac{(L_{x_3} - L_3\cos\theta)^2}{(I_1^0\sin\theta)^2}}$$

Integroidaan $\dot\theta$:n yhtälö alkuehdolla $\theta = \theta_0$ hetkellä $t = t_0$

$$t - t_0 = \pm\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1^0}\left(E - \frac{L_3^2}{2I_3} - mgh\cos\theta\right) - \frac{(L_{x_3} - L_3\cos\theta)^2}{(I_1^0\sin\theta)^2}}}$$

Muuttujan vaihdos $u = \cos\theta \;\Rightarrow\; du = -\sin\theta\, d\theta; \sin^2\theta = 1 - u^2$

$$t - t_0 = \mp I_1^0\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{2I_1^0(1-u^2)\left(E - \frac{L_3^2}{2I_3} - mghu\right) - (L_{x_3} - L_3 u)^2}}$$

Weierstrassin elliptinen integraali (katso jostain hyvästä taulukkokirjasta)

Ongelma ratkaistu (ainakin periaatteessa)!

Lähtötilanne: E, L_3, L_{x_3}, θ_0, φ_0, ja ψ_0 tunnetaan

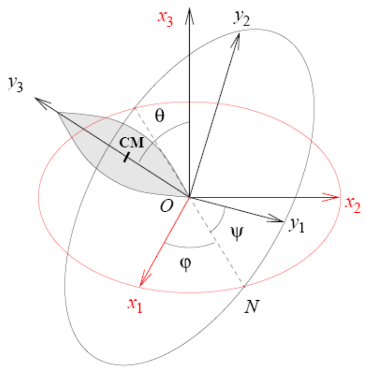
Lasketaan $\theta(t)$

Sijoitetaan tämä yhtälöihin

$$\dot{\varphi} = \frac{L_{x_3} - L_3 \cos\theta}{I_1^0 \sin^2\theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_3}{I_3} - \cos\theta \frac{L_{x_3} - L_3 \cos\theta}{I_1^0 \sin^2\theta}$$

ja integroidaan $\longrightarrow$ $\varphi(t)$ ja $\psi(t)$



Nutaatio

Ratkaisusta

$$t - t_0 = \mp I_1^0 \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{2I_1^0(1-u^2)\left(E - \frac{L_3^2}{2I_3} - mghu\right) - (L_{x_3} - L_3 u)^2}}$$

saadaan irti tärkeä tulos integraalia laskematta!

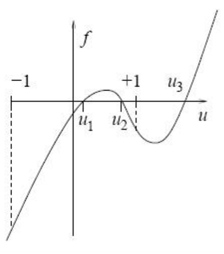
Juurilauseke muotoa $\sqrt{f(u)}$, missä

$f(u) = (1-u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 \propto \dot{u}^2$

$f(u) = 0 \;\Rightarrow \dot{\theta} = 0; \quad u = \cos\theta$

$f(\pm 1) < 0$ ja $f(\infty) \sim \beta u^3 > 0$

$\Rightarrow f$:llä nollakohta $u_3 \in [1, \infty)$ (epäfysik.)



Fysik. ratkaisuille $u \in [u_1, u_2]$, missä

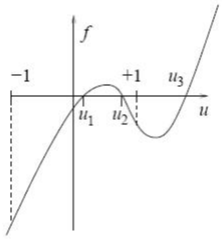
$f(u) > 0$, kun $u_1 < u < u_2$

$f(u_1) = f(u_2) = 0$

$u = \cos\theta$

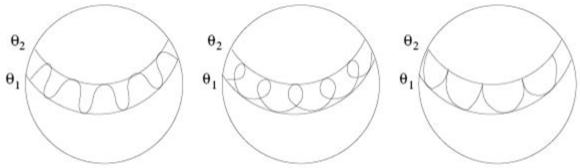
$f(u) > 0,$ kun $u_1 < u < u_2$

$f(u_1) = f(u_2) = 0$



$\Rightarrow$ Nutaatio: symmetria-akselin y_3 suunta heilahtelee kulmien

$\theta_1 = \arccos u_1$ ja $\theta_2 = \arccos u_2$ välillä



Kevättasauspisteen prekessio

Maapallo litistynyt, $I_1 \neq I_3$

Pyörimisakseli 23°27′ kulmassa ekliptikaan nähden

$\Rightarrow$ Aurinko & Kuu aihuttavat vääntömomentin

$\Rightarrow$ prekessio (ei siis sama kuin vapaan hyrrän prekessio)

$$\langle\dot\varphi\rangle = -\frac{3\,GM}{2\,\omega_3 r^3}\frac{I_3 - I_1}{I_3}\cos\theta$$ (katso lasku esim. Goldsteinin oppikirjasta)

M Auringon/Kuun massa

r Auringon/Kuun etäisyys

ω_3 Maan pyörimisliikkeen kulmataajuus

$\theta = 23°27'$ mitataan rataliikkeen tason normaalista

Aurinko: 1 kierros$/81100\,\mathrm{a}$ $(GM/(\omega_3 r^3) = 2\pi/365\,\mathrm{a}^{-1})$

Kuu: 1 kierros$/37000\,\mathrm{a}$ $(GM/(\omega_3 r^3) = 2{,}19\cdot 2\pi/365\,\mathrm{a}^{-1})$

Yhteisvaikutus: $50{,}25''\,\mathrm{a}^{-1} \sim$ 1 kierros$/26000\,\mathrm{a}.$