Hamiltonin – Jacobin teoriaa

Hamiltonin liikeyhtälöt $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

Ratkaisut: $\begin{cases} q_i = q_i(t; q_0, p_0) \\ p_i = p_i(t; q_0, p_0) \end{cases}$ q_0 ja p_0 ovat integroimisvakioita esim. q:n ja p:n alkuarvot.

Käännetään yhtälöt: $\begin{cases} q_{0j} = q_{0j}(q, p, t) & \equiv Q_j \\ p_{0j} = p_{0j}(q, p, t) & \equiv P_j \end{cases}$

Kanoninen muunnos $(q, p) \to (Q, P)$ (vakioita)

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0; \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0$$

K ei siis riipu muuttujista (Q, P), joten se on vakio. Voidaan valita $K = 0$.

Muunnoksen generaattori $G_2 = S = S(q, P, t)$, jolle $K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

Toisaalta G_2-tyypin generaattoreille $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}; \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$

Merk. $\begin{cases} Q_i \equiv \beta_i \\ P_i \equiv \alpha_i \end{cases}$ $\quad S = S(q, P, t)$ $\Rightarrow S = S(q, t; \alpha)$ $n + 1$ muuttujan funktio

vakio

$$H(q, p, t) = H(q, \tfrac{\partial S}{\partial q}, t)$$

$$H(q, \tfrac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$ Hamiltonin-Jacobin yhtälö

- $n + 1$ muuttujan 1. kl. ODY S:lle.
- S generoi kanonisen muunnoksen, jossa Q:t ja P:t ovat vakioita

Ratkaisuresepti:

1. Ratkaistaan $S(q, t; \alpha)$ H-J:n yhtälöstä.

ainoa mahdollisesti vaikea tehtävä

2. Muodostetaan $\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}(q, t, \alpha)$ (n yhtälöä)
3. Ratkaistaan ylläolevista yhtälöistä $q(t, \alpha, \beta)$
   $\Rightarrow$ rata ajan ja integroimisvakioiden funktiona!

Hamiltonin – Jacobin teoriassa ongelman ratkaisu on yhtä kuin kanonisen muunnoksen generaattorin löytyminen

Hamiltonin – Jacobin teoriaa konservatiivisessa potentiaalissa

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U(\mathbf{r}); \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial r_i}$$

H-J:n yhtälö: $\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + U(\mathbf{r}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

Konservatiivisuus: $H = E \Rightarrow \quad E + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad S = S_q(q, \alpha) - Et$

ja $\frac{1}{2m}(\nabla S_q)^2 + U(q) = E$

Muistetaan, että α:t olivat systeemin liikevakioita.
Huomataan, että S_q riippuu väkisinkin E:stä.
Kannattaa siis valita esim. $\alpha_1 = E$.

H-J:n teoriassa siis muunnetuiksi koordinaateiksi kelpaavat muutkin liikevakiot kuin alkuperäisten koordinaattien alkuarvot.

S:n aikaderivaatta pitkin rataa q:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L \quad \Rightarrow S = \int L\, dt + S_0$$

Hamiltonin periaate $\Rightarrow \delta S = 0$. (Ei kelpaa yhtälöksi S:n etsintään!)

Esim. Harmoninen oskillaattori

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = E$$

Nyt valitaan $\alpha = E$ ja $S = S_q(q, E) - Et,$ missä

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_q}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = E \quad \Rightarrow \frac{\partial S_q}{\partial q} = \sqrt{mk\left(\frac{2E}{k} - q^2\right)}$$

josta $S = \sqrt{mk}\int dq\sqrt{\frac{2E}{k} - q^2} - Et$

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{k}}\int\left(\frac{2E}{k} - q^2\right)^{-1/2} dq - t$$

$$\Rightarrow \beta + t = -\underbrace{\sqrt{\frac{m}{k}}}_{=\omega_0^{-1}} \arccos\left(q\sqrt{\frac{k}{2E}}\right) \quad \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}\cos\omega_0(t+\beta)$$

Muunnetun systeemin kanoniset muuttujat: $Q = \beta$ ja $P = E$.
Molemmat liikevakioita, mutta selvästi eivät $q(0)$ ja $p(0)$!

Esim. Keskeisliike

Tarkastellaan keskeisliikettä tasossa $\theta = \pi/2$

$$H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + U(r)$$

Konservatiivisuus $\Rightarrow$ $S = S_q(r,\varphi,\alpha) - \alpha_1 t,\ \ \alpha_1 = E$

H-J: $$\frac{1}{2m}\left((\partial_r S_q)^2 + \frac{(\partial_\varphi S_q)^2}{r^2}\right) + U(r) = \alpha_1$$

φ on syklinen $\Rightarrow$ $p_\varphi =$ vakio $= l \equiv \alpha_2$ ja $\partial_\varphi S_q = \alpha_2$

$$S_q = S_r(r;\alpha) + \varphi\alpha_2$$

$$\frac{1}{2m}\left((\partial_r S_r)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2}\right) + U(r) = \alpha_1$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial r} = \sqrt{2m[\alpha_1 - U(r)] - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} \quad \Rightarrow$$

$$S = \int dr \sqrt{2m[\alpha_1 - U(r)] - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} + \varphi\alpha_2 - \alpha_1 t$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \int \frac{m\,dr}{\sqrt{2m[\alpha_1 - U(r)] - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} - t$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\int \frac{\alpha_2\,dr}{r^2\sqrt{2m[\alpha_1 - U(r)] - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} + \varphi$$

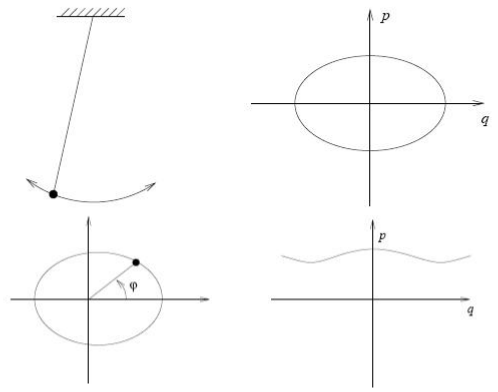
$\Rightarrow$ radan yhtälöt $r(t,\alpha,\beta)$ ja $r(\varphi,\alpha,\beta)$ (esim. Kepler)

Vaikutus- ja kulmamuuttujat

Periodinen liike

Libraatio

Rotaatio



Hamilton-Jacobi: $P_i = \alpha_i$ integroimisvakioita. Merk. $\alpha = \{\alpha_i\}$
$\rightarrow$ vaikutusmuuttujat (action variables) $J_i = J_i(\alpha)$, $J = \{J_i\}$

Määr: $$\boxed{J_i = \oint p_i \, dq_i \quad \forall \; i = 1, \ldots, n}$$

Ol. $S = S_q(q; \alpha) - \alpha_1 t$

ja S_q separoituva q- koordinaateissa $\quad S_q = \sum_i S_{q_i}(q_i; \alpha)$

H-J: $\quad p_i = \dfrac{\partial S_q}{\partial q_i} = \dfrac{\partial S_{q_i}}{\partial q_i}(q_i; \alpha)$

$$J_i = \oint p_i \, dq_i \; = \oint \frac{\partial S_{q_i}}{\partial q_i}(q_i; \alpha) \, dq_i = J_i(\alpha)$$

$\Rightarrow \quad \alpha_i = \alpha_i(J) \quad \Rightarrow S_q = S_q(q, J)$

Määr: kulmamuuttujat (angle variables)

$w_i = \dfrac{\partial S_q}{\partial J_i}$ (vrt. $\beta_i = \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i}$)

Vastaa kan. muunnosta $(q, p) \rightarrow (w, J)$, jonka generoi $S_q(q, J)$

Konservativiisuus $\Rightarrow \quad H = E = \alpha_1(J)$

Muunnos ei riipu ajasta $\Rightarrow \quad K = H(J)$

$\Rightarrow$ kulmamuuttujat syklisiä koordinaatteja:

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} \equiv \nu_i(J) = \text{vakio}$$

$$w_i = \nu_i(J)\, t + \beta_i$$

Paljonko w_i muuttuu, kun q_i tekee täyden syklin?

$$\delta w_i = \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \Rightarrow$$

$$\Delta w_i = \sum_j \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_j \oint \frac{\partial^2 S_q}{\partial q_j \partial J_i} dq_j = \sum_j \oint \frac{\partial p_j}{\partial J_i} dq_j$$

J_i:t vakioita $\Rightarrow \quad \Delta w_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_j\, dq_j = \sum_j \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = 1$

Merk. q_i:n periodin pituutta $\tau_i \Rightarrow \quad \Delta w_i = \tau_i \nu_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_i = \tau_i^{-1}$.

Dimensiot: $[J] = [qp] = [|\mathbf{L}|] \quad \Rightarrow \quad [w] = [Et]/[J] = 1$.

Kanoniset konjugaatit: $(r, p),\ (\theta, L_i),\ (t_0, E)$, ...

Esim. Harmonisen oskillaattorin periodi (hohhoijaa)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2 = E$$

Liike tiedetään jaksolliseksi $\Rightarrow$

$$J = \oint p\, dq = \sqrt{mk} \oint \sqrt{\frac{2E}{k} - q^2}\, dq \qquad \Big| \ \text{sij. } q = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\theta$$

$$= \frac{2E\sqrt{mk}}{k} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta}_{=\frac{1}{2}2\pi} = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\Rightarrow H = E = \frac{J}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Rightarrow \nu = \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Jaksollisen liikkeen periodi saatiin siis määrätyksi liikeyhtälöitä muodostamatta, saati ratkaisematta!

Esim. Keplerin liike ratatasossa (hohhohhoijaa)

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} = E \qquad \text{missä } p_\varphi = l = \text{vakio } (\varphi \text{ syklinen})$$

Vaikutusmuuttujat ovat siis

$$\begin{aligned} J_\varphi &= \oint p_\varphi \, d\varphi = \oint l \, d\varphi = 2\pi l \\ J_r &= \oint p_r \, dr = \oint \sqrt{2m\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{l^2}{r^2}} \, dr \end{aligned}$$

Esim. residylaskennalla selviää, että (ks. esim. Goldstein)

$$J_r = -2\pi l + \pi k \sqrt{\frac{2m}{-E}} = -J_\varphi + \pi k \sqrt{\frac{2m}{-E}}$$

Näin siis $H(J_r, J_\varphi) = E = -\dfrac{2\pi^2 m k^2}{(J_r + J_\varphi)^2}$

$\Rightarrow$ Molemmilla koordinaateilla on sama taajuus

$$\nu = \frac{\partial H}{\partial J_r} = \frac{\partial H}{\partial J_\varphi} = \frac{4\pi^2 m k^2}{(J_r + J_\varphi)^3} = \frac{1}{\pi k}\sqrt{\frac{-2E^3}{m}} \qquad \Rightarrow \text{Ratakäyrä suljettu.}$$

Keplerin liike yleisemmin

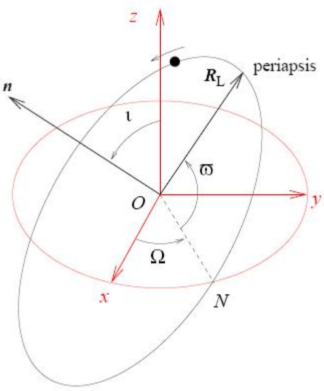
$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} = E$$

missä nyt $p_\varphi = l_z =$ vakio (φ syklinen).

Koordinaatiston valinnasta riippumatta pitää olla

$$\frac{l^2}{r^2} = \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow p_\theta^2 = l^2 - \frac{l_z^2}{\sin^2\theta} \quad = l^2\left(1 - \frac{\cos^2\iota}{\sin^2\theta}\right)$$



Vaikutusmuuttujat

$$\begin{aligned}
J_r &= \oint p_r\,dr = -2\pi l + \pi k\sqrt{\frac{2m}{-E}} \\
J_\varphi &= \oint p_\varphi\,d\varphi = \oint l_z\,d\varphi = 2\pi l_z \\
J_\theta &= \oint p_\theta\,d\theta = l\oint\sqrt{1-\frac{\cos^2\iota}{\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= 2\pi l(1-\cos\iota) = 2\pi(l-l_z) \\
J_r + J_\varphi + J_\theta &= \pi k\sqrt{\frac{2m}{-E}} \qquad \Rightarrow H = E = -\frac{2\pi^2 mk^2}{(J_r+J_\theta+J_\varphi)^2}
\end{aligned}$$

Tehdään kanoninen muunnos uusiin vaikutus- ja kulmamuuttujiin $(w_j, J_j),\ j = 1,2,3$ generaattorilla

$$G_2 = (w_\varphi - w_\theta)J_1 + (w_\theta - w_r)J_2 + w_r J_3$$

$$G_2 = (w_\varphi - w_\theta)J_1 + (w_\theta - w_r)J_2 + w_r J_3$$

$$w_1 = \frac{\partial G_2}{\partial J_1} = w_\varphi - w_\theta, \qquad J_r = \frac{\partial G_2}{\partial w_r} = J_3 - J_2$$

$$w_2 = w_\theta - w_r \qquad J_\theta = J_2 - J_1$$

$$w_3 = w_r \qquad J_\varphi = J_1$$

$$J_1 = J_\varphi = 2\pi l_z$$

$$J_2 = J_\varphi + J_\theta = 2\pi l$$

$$J_3 = J_r + J_\theta + J_\varphi = \pi k\sqrt{\frac{2m}{-E}} \qquad \Rightarrow H = -\frac{2\pi^2 mk^2}{J_3^2}$$

Eli uusissa koordinaateissa $w_3 = \nu t + w_{30}$, muut liikevakioita!

Nämä määrävät rataelementtien arvot:

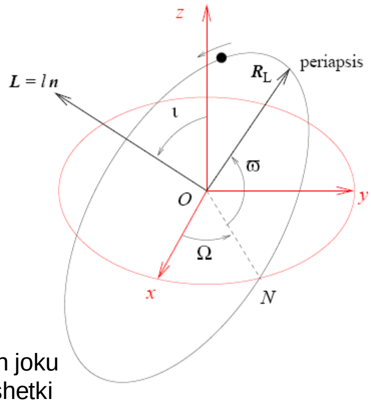
$$\cos\iota = \frac{J_1}{\;}$$

$$a = \frac{J_3^2}{4\pi^2 mk}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{J_2^2}{J_3^2}},$$

$$\Omega = 2\pi w_1$$

$$\varpi = 2\pi w_2$$



Ja kuudentena rataelementtinä on sitten joku ajankohta, esim. periapsiksen ohittamishetki

Kanonista häiriöteoriaa

Ol. Hamiltonin funktio muotoa $H = H_0 + \Delta H$,

missä H_0 integroituva (LY ratkeaa), ΔH häiriö

Esim. Maan rata: Aurinko H_0; Mars, Jupiter ΔH

1. Aloitetaan H_0:sta

   $(q, p) \to (Q, P)$ generaattorille $S_0(q, P, t)$, s.e.

   $K_0(Q, P) = H_0(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}, t) + \dfrac{\partial S_0}{\partial t} = 0$ (Hamilton–Jacobi)

   $\Rightarrow$ Q, P liikevakioita, merk. Q_0, P_0

2. Tehdään sitten sama muunnos $p = \dfrac{\partial S_0}{\partial q}$; $Q = \dfrac{\partial S_0}{\partial P}$

   systeemille $H = H_0 + \Delta H$

   $$\Delta K(Q, P, t) = H + \frac{\partial S_0}{\partial t} = \Delta H|_{q(Q,P,t),p(Q,P,t)} \Rightarrow$$

   $$\dot{Q} = \frac{\partial\,\Delta K(Q, P, t)}{\partial P}; \quad \dot{P} = -\frac{\partial\,\Delta K(Q, P, t)}{\partial Q}$$ (tarkka ratkaisu)

$$\dot{Q} = \frac{\partial\, \Delta K(Q,P,t)}{\partial P}; \quad \dot{P} = -\frac{\partial\, \Delta K(Q,P,t)}{\partial Q}$$

3. Sij. oik. puolille $Q = Q_0$ ja $P = P_0$ (vakioita) ja integroidaan
   $\rightarrow$ 1. kl. ratkaisut $Q_1 = Q_1(t; Q_0, P_0)$ ja $P_1 = P_1(t; Q_0, P_0)$

4. Iteraatiolla

$$\begin{cases} \dot{Q}_{i+1} = \dfrac{\partial\, \Delta K}{\partial P_i}(Q_i, P_i, t) \\ \\ \dot{P}_{i+1} = -\dfrac{\partial\, \Delta K}{\partial Q_i}(Q_i, P_i, t) \end{cases}$$

Tätä voidaan jatkaa kunnes haluttu tarkkuus on saavutettu

Perihelin kiertymä

Bertrandin teoreema: Ympyräratojen häiriöt johtavat toisessa kertaluvussa suljettuihin ratoihin, jos ja vain jos

$\underbrace{U(r) = -k/r}_{\text{Keplerin laki}}$ tai $\underbrace{U(r) = \frac{1}{2}kr^2}_{\text{Hooken laki}}$

Keplerin laki $\Rightarrow$ suljetut radat (perihelin suunta vakio).

Planeettakunta ei kahden kpl ongelma $\Rightarrow$
häiriötermejä voimaan $\Rightarrow$ perihelit kiertyvät

Hamiltonin funktio $$H = \underbrace{\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r}}_{=H_0} + \Delta H(r, \varphi, t)$$

Hamiltonin – Jacobin teoriassa saatiin

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \int \frac{m\,dr}{\sqrt{2m[\alpha_1 - U(r)] - \dfrac{\alpha_2^2}{r^2}}} - t$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\int \frac{\alpha_2\,dr}{r^2\sqrt{2m[\alpha_1 - U(r)] - \dfrac{\alpha_2^2}{r^2}}} + \varphi$$

missä nyt $U(r) = -k/r$

$$\alpha_1 = E \equiv P_{01}$$
$$\alpha_2 = p_\varphi = l = P_{02}.$$

Jolloin uudet Q:t ovat

$$Q_{01} = \int \frac{m\,dr}{\sqrt{2m\left(P_{01} + \dfrac{k}{r}\right) - \dfrac{P_{02}^2}{r^2}}} - t \qquad \Rightarrow\ t = t_0(r)$$

$$Q_{02} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\int \frac{P_{02}\,dr}{r^2\sqrt{2m\left(P_{01} + \dfrac{k}{r}\right) - \dfrac{P_{02}^2}{r^2}}} + \varphi \qquad \Rightarrow r = r_0(\varphi)$$

$$r = r_0(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - Q_{02})}$$

$$p = \frac{P_{02}^2}{mk} = \frac{l^2}{mk}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2P_{01}P_{02}^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

Perihelin kiertymänopeus $\quad \dot{\varpi} = \dfrac{\partial \Delta K}{\partial l}$

$$\Rightarrow\ \Delta\varpi = \frac{\partial}{\partial l}\int_0^T \Delta K\,dt \overset{l = mr_0^2\dot{\varphi}}{=} \frac{\partial}{\partial l}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta H(r_0, \varphi, t_0)\,mr_0^2}{l}\,d\varphi$$

$r = r_0(\varphi)$ ja $t = t_0(r(\varphi))$ sijoitetaan Keplerin liikkeen yhtälöistä.

<u>Esim</u>. $\Delta H = C/r^2 \Rightarrow$

$$\Delta\varpi = \frac{\partial}{\partial l}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta H(r_0, \varphi, t_0)\,mr_0^2}{l}\,d\varphi = \frac{\partial}{\partial l}\frac{2\pi mC}{l} = -\frac{2\pi mC}{l^2}$$

Esim. Merkuriuksen perihelin kiertymä

$$\Delta\varpi = \frac{\partial}{\partial l}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta H(r_0,\varphi,t_0)\, m r_0^2}{l}\, d\varphi$$

$$r_0 = \frac{p}{1+e\cos\varphi},\ p = \frac{l^2}{mk},\ e = \sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}},\ k = GM_\odot m$$

Merkuriuksen perihelin kiertymäksi on mitattu $5600"/100\,\mathrm{a}$

Kevättasauspisteen prekessio: $5026"/100\,\mathrm{a}$

Jää: $574"/100\,\mathrm{a}$

Muiden planeettojen aiheuttamat häiriöt muotoa

$$\Delta H(r,\varphi,t) = -\frac{GM_i m}{\sqrt{r^2+R_i^2-2rR_i\cos\psi_i}},$$

$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i(t)$
toisen planeetan rata
$\psi_i = \sphericalangle(\mathbf{r},\mathbf{R}_i)$

Numeeriset laskut $\Rightarrow$ yhteisvaikutus $\langle\dot\varpi\rangle = 531"/100\,\mathrm{a}.$

Eli edelleen jää $43"/100\,\mathrm{a}$ vajaaksi

Mistä ero? Vulkanus?

Yleinen suhteellisuusteoria: $\Delta H = -\frac{h}{r^3}$ $\qquad h = \frac{k}{c^2}\frac{l^2}{m^2}$

$$\Delta\varpi = -\frac{\partial}{\partial l}\int_0^{2\pi} \frac{mh}{l}\frac{1+e\cos\varphi}{p}\, d\varphi$$

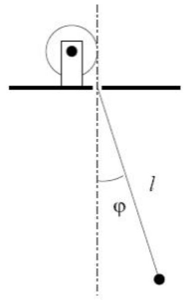
$$= -\frac{\partial}{\partial l}\frac{2\pi m^2 kh}{l^3} = \frac{6\pi m^2 kh}{l^4}$$

$$\Delta\varpi = \frac{6\pi k^2}{c^2 l^2} \qquad \Rightarrow \langle\dot\varpi\rangle = 43"/100\,\mathrm{a}$$

Ja puuttuva $43"/100\,\mathrm{a}$ on selitetty!

Adiabaattiset invariantit

Lorentzin-Einsteinin heiluri (v. 1911)



$L = \frac{1}{2}m(\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{\varphi}^2) + mg\ell\cos\varphi$

$\ell = \ell(t), \quad \dot{\ell} \ll \sqrt{g\ell}$

Heiluriin tehdään työtä $\Rightarrow$ E ei säily!

LORENTZ: "Mikä säilyy?"

EINSTEIN: "E/ν säilyy!"

Jonkin parametrin (tässä ℓ) hitaissa muutoksissa säilyviä suureita kutsutaan adiabaattisiksi invarianteiksi.

Parametrin λ hidas muutos: $T\frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda$, $\qquad T$ liikkeen jakso.

$H(q,p;\lambda)$ riippuu parametrista $\lambda(t)$ (annettu aikariippuvuus)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}$$

E:n muutos periodin T yli keskiarvoistettuna

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt$$

Hamilton: $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \Rightarrow \; dt = \frac{dq}{\dot{q}} = dq\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1}$

$$\Rightarrow T = \int_0^T dt = \oint dq \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1}$$

Integroitaessa on pidettävä λ vakiona (jaksollinen liike).

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial H}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} dq}{\oint \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} dq}$$

$$H = H(q,p;\lambda) = E \quad \Rightarrow \; p = p(q;E,\lambda) \quad \Rightarrow \; \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} = \frac{\partial p}{\partial E}$$

Dervioidaan H:ta parametrin λ suhteen

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E}dq} = -\frac{d\lambda}{dt}\frac{\frac{\partial J}{\partial \lambda}}{\frac{\partial J}{\partial E}}; \qquad\qquad J = \oint p\,dq$$

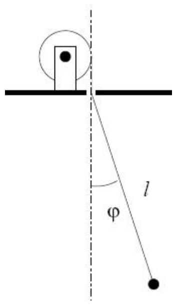
$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \frac{\partial J}{\partial E} + \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial J}{\partial \lambda} \\ &= \left\langle \frac{dE}{dt}\frac{\partial J}{\partial E} + \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial J}{\partial \lambda} \right\rangle = \left\langle \frac{dJ}{dt} \right\rangle \end{aligned}$$

J on adiabaattinen invariantti, liikevakio λ:n hitaissa muutoksissa

Esim. Lorentzin – Einsteinin heiluri

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \qquad q \equiv \varphi \ll 1$$

$$\omega = \omega(\ell) = \sqrt{g/\ell}$$



Kun ℓ pidetään vakiona, niin J on harmonisen oskillaattorin vaikutusmuuttuja

$$J = \frac{2\pi E}{\omega} = \frac{E}{\nu}$$

Kun l muuttuu hitaasti, on J adiabaattinen invariantti

$\Rightarrow$ E/ν säilyy!

Esim. Varaus magneettikentässä

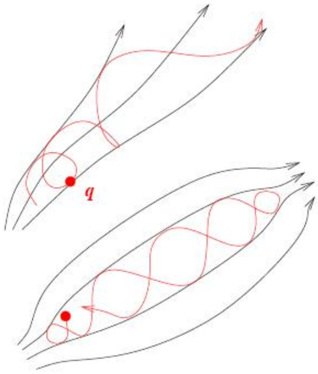
$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\phi \\ y = y_0 + r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} p_r = m\dot{r} + qA_r \\ p_\phi = mr^2\dot{\phi} + qrA_\phi \\ p_z = m\dot{z} + qA_z \end{cases}$$

$J_\phi = \oint p_\phi \, d\phi = \dfrac{2\pi m}{|q|}\mu,$ missä

$$\mu = \frac{W_\perp}{B} = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} \quad (= IA)$$

on hiukkasen magneettinen momentti

on adiabaattinen invariantti



Myös $J_z = 2|p_z|\ell$
on liikevakio, jos kenttä magneettinen pullo ja $|\dot{\ell}| \ll |\dot{z}|$