Klassinen mekaniikka, sl 2011

Harjoitus 13, 15. ja 16.12.2011
Palautus viimeistään 12.12. klo 16

1. Tutkitaan muotoa $\Delta H = -h/r^n$ olevaa häiriötä Keplerin liikkeessä. Kanonisen häiriöteorian mukaan perihelin kiertymä yhtä kierrosta kohti saadaan lausekkeesta

$$\Delta\varpi = \frac{\partial}{\partial l}\int_0^{2\pi} \frac{mr^2\Delta H}{l}d\varphi,$$

missä $r^{-1} = mkl^{-2}(1 + e\cos\varphi)$ on Keplerin radan lauseke ja $e = \sqrt{1 + 2El^2/(mk^2)}$. Laske perihelin kiertymä tapauksessa $n = 4$.

2. Tarkastellaan Lorentzin-Einsteinin heiluria eli heiluria, jonka varren pituus muuttuu vähän yhden heilahduksen aikana. Kuinka paljon heilurin amplitudi eli suurin heilahduskulma muuttuu varren pituuden kaksinkertaistuessa?

3. Stroboskooppiset kuvaukset. Tarkastellaan *potkittua oskillaattoria*, jota kuvaavat liikeyhtälöt

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -2\beta v - \omega_0^2 x + u\,I(x)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t - nT),$$

missä β, ω_0, u ja T ovat vakioita, $I(x)$ on dimensioton, mielivaltainen (mutta annettu) x:n funktio ja $\delta(t)$ on Diracin delta-funktio. Pakkovoima kuvaa jaksollisesti (hetkillä nT) toistuvia potkuja, joissa oskillaattori saa "impulssin" $\Delta v = u\,I(x)$. Johda systeemille seuraava *stroboskooppinen kuvaus*:

$$x_{n+1} = ECx_n + \frac{ES}{\omega_0}v_n \tag{1}$$

$$v_{n+1} = -ES\omega_0 x_n + ECv_n + u\,I(x_{n+1}), \tag{2}$$

missä $E = e^{-\beta T}$, $S = \sin\omega_0 T$ ja $C = \cos\omega_0 T$. Tässä $x_n \equiv \lim_{\delta t\to 0+} x(nT + \delta t)$ ja $v_n \equiv \lim_{\delta t\to 0+} v(nT + \delta t)$ ovat välittömästi n:nnen potkun jälkeen mitatut paikka ja nopeus.

4. Tutkitaan tehtävän 3 potkittua oskillaattoria faasitasossa (x_n, v_n), kun $\omega_0 = \pi/2T$ ja $u = 1$ (nopeuden yksikkö). Skaalataan muuttuja $Ev_n \to v_n$ ja valitaan $E\,I(x) \equiv f(x) = 1 - ax^2$.

   (a) Osoita, että kuvaus on nyt muotoa

   $$x_{n+1} = v_n, \quad v_{n+1} = -E^2 x_n + f(v_n).$$

   Mikä kuvaus tästä saadaan erittäin suuren vaimennuksen rajalla, $E \to 0$?

   (b) Etsi kuvauksen *kiintopisteet* eli ne pisteet (2 kpl), joille $x_{n+1} = x_n$ ja $v_{n+1} = v_n$.

---

5. Bifurkaatiot. Tarkastellaan pientä massiivista kappaletta, joka liukuu kitkatta ympyrän (säde a) muotoisella raiteella. Raide pyörii ympyrän halkaisijan suuntaisen akselin ympäri kulmanopeudella ω. Akseli on pystyasennossa gravitaatiokentässä g. Kappaleen liikettä raiteella voidaan kuvata liikeyhtälöllä

$$a\ddot{\theta} = -g\sin\theta + a\omega^2\cos\theta\sin\theta,$$

missä (a, θ) on kappaleen paikka raiteella napakoordinaatiostossa (origona ympyrän keskipiste).

   (a) Johda liikeyhtälö Lagrangen formalismilla.

   (b) Muunna liikeyhtälö kahden 1. kl. differentiaaliyhtälön ryhmäksi sijoituksella $\phi = \dot{\theta}$.

   (c) Etsi systeemin kiintopisteet ja tutki niiden stabiiliutta kulmanopeuden ω funktiona. (Vihje: tarkastele efektiivisen potentiaalin minimi-/maksimikohtia.)