AdS/CFT-dualiteetit

Janne Alanen

13. lokakuuta 2008

Sisältö

MIKSI JA MITÄ TUTKITAAN?

Miksi?

- Mustanaukon entropia $S_{BH} \propto A$. Normaalisti $S \propto V$?
- Ehdotus: Voitaisiinko mustan aukon fysiikka kuvata teorialla, jolla dimensioita vähemmän? Holografiaperiaate!
- Säieteoria: Näin näyttäisi olevan. Säieteoriasta voidaan laskea entropia S_V ja löytää $S_V = S_{BH}$!
- Miten tehdään? Lasketaan avoimien säikeiden vapausasteita braanin pinnalla. Braani = "kalvo" mihin avoimien säikeidenpäät kiinnittyvät!

Miksi?

- Mustanaukon entropia $S_{BH} \propto A$. Normaalisti $S \propto V$?
- Ehdotus: Voitaisiinko mustan aukon fysiikka kuvata teorialla, jolla dimensioita vähemmän? Holografiaperiaate!

- Säieteoria: Näin näyttäisi olevan. Säieteoriasta voidaan laskea entropia S_V ja löytää $S_V = S_{BH}$!
- Miten tehdään? Lasketaan avoimien säikeiden vapausasteita braanin pinnalla. Braani = "kalvo" mihin avoimien säikeidenpäät kiinnittyvät!

Mitä?

- Braaneihin kiinnittyneiden säikeiden fysiikkaa (= mittakenttäteoria, ei gravitaatiota)
- Säieteoriaa braanien kaareuttamassa avaruudessa (= säieteoria, sisältää gravitaation)
- Näiden yhdistiminen: Mittakenttäteoria/gravitaatio -dualiteetit!
- Tarkoittaa? Sama fysiikka voidaan kuvata kahdella erilaisella teorialla!

SÄIETEORIA JA BRAANIT

Hiukkaset

- Hiukkasfysiikan teoriat kvanttikenttäteorioita.
- Ennen: Hiukkasen paikkaa ja liikemäärää kuvataan pisteellä (x, p). Kvantisointi $\Rightarrow [x, p] = i\hbar$.
- Nykyään: Hiukkanen on kenttä, joka riippuu pisteistä (x, p), eli $(\phi(x), \pi(x))$. Kvantisointi $\Rightarrow [\phi(x), \pi(y)] = i\hbar\delta^{n-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.
- Ongelmia! Hiukkaset pistemäisiä, 0-ulotteisia $\Rightarrow$ divergenssejä. Ei osata kvantittaa gravitaatiota eli kenttää $g_{\mu\nu}$ (gravitoni).

Hiukkaset

- Hiukkasfysiikan teoriat kvanttikenttäteorioita.
- Ennen: Hiukkasen paikkaa ja liikemäärää kuvataan pisteellä (x, p). Kvantisointi $\Rightarrow [x, p] = i\hbar$.
- Nykyään: Hiukkanen on kenttä, joka riippuu pisteistä (x, p), eli $(\phi(x),\pi(x))$. Kvantisointi $\Rightarrow [\phi(x), \pi(y)] = i\hbar\delta^{n-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.
- Ongelmia! Hiukkaset pistemäisiä, 0-ulotteisia $\Rightarrow$ divergenssejä. Ei osata kvantittaa gravitaatiota eli kenttää $g_{\mu\nu}$ (gravitoni).

Säikeet

- Säieteoriassa hiukkaset säiemäisiä = 1-ulotteisia.
- Avoimia ja suljettuja säikeitä. Avoimia säikeitä mm. mittabosonit! (fotoni, gluoni)
- Säieteorian hiukkaspektristä löytyy myös gravitoni, eli gravitaatio vuorovaikutusta välittävä spin-2 hiukkanen. Suljettu säie!
- Ongelmat pois! Ei divergenssejä + osataan kvantittaa gravitaatio!
- Ongelmia? Tarvitaan 10-11 ulottuvuutta. Mikä on säiekenttäteoria?

Säikeet

- Säieteoriassa hiukkaset säiemäisiä = 1-ulotteisia.
- Avoimia ja suljettuja säikeitä. Avoimia säikeitä mm. mittabosonit! (fotoni, gluoni)
- Säieteorian hiukkaspektristä löytyy myös gravitoni, eli gravitaatio vuorovaikutusta välittävä spin-2 hiukkanen. Suljettu säie!

- Ongelmat pois! Ei divergenssejä + osataan kvantittaa gravitaatio!
- Ongelmia? Tarvitaan 10-11 ulottuvuutta. Mikä on säiekenttäteoria?

- Säieteoriassa Weylin symmetria:

$$g_{\mu\nu} \Rightarrow \exp(\rho(x))g_{\mu\nu}$$

- Tutkimalla suljettujen säikeiden matalaenergia rajaa, ja vaatimalla Weylin symmetria myös kvanttitasolla, voidaan johtaa Einsteinin gravitaatioteoria:

$$S = \int dx^d \left\{ R + \ldots \right\},$$

missä R on Riccin skalaari.

- Yleisemmin: säieteorian matalaenergia raja = Supergravitaatio! (Super = supersymmetria)

Braani

- Säieteoriasta (supergravitaatiosta) löytyy myös klassisia braaniratkaisuja.
- Braanit ovat massiivisia objekteja, eli kaareuttavat avaruutta. Ei enää laakea!
- Mitä braaneilla tehdään? Avoimien säikeiden päät ovat sidottuja braaneihin!
- Eli braanin pinnalla elää teoria, joka kuvaa avoimia säikeitä $\Rightarrow$ matalaenergia rajalla jokin supersymmetrinen mittakenttäteoria!
- Tarkemmin: jos vain yksi braani, teoria on $U(1)$ mittakenttäteoria

Braani

- Säieteoriasta (supergravitaatiosta) löytyy myös klassisia braaniratkaisuja.
- Braanit ovat massiivisia objekteja, eli kaareuttavat avaruutta. Ei enää laakea!
- Mitä braaneilla tehdään? Avoimien säikeiden päät ovat sidottuja braaneihin!
- Eli braanin pinnalla elää teoria, joka kuvaa avoimia säikeitä $\Rightarrow$ matalaenergia rajalla jokin supersymmetrinen mittakenttäteoria!
- Tarkemmin: jos vain yksi braani, teoria on $U(1)$ mittakenttäteoria

N braania (gravitaatio)

- Pistetään N kappaletta braaneja päällekkäin $\Rightarrow$ suuri massa, musta braani! (musta aukko). Lähellä horisonttia:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 dx_i dx^i,$$

missä $f(r) = r^2(1 - \frac{r_0^d}{r^d})$, $r_0 = \text{horisontti.}$

- Musta aukko jonka horisontti on taso ($d\Omega \to dx_i dx^i$).
- Asymptoottisesti ($r \to \infty \Rightarrow f(r) \to r^2$) AdS avaruus (tyhjä avaruus + kosmologinen vakio Λ)

- Mittakenttäteoria: $U(1)$ symmetria $\to$ $U(N)$ symmetria!

N braania (gravitaatio)

- Pistetään N kappaletta braaneja päällekkäin $\Rightarrow$ suuri massa, musta braani! (musta aukko). Lähellä horisonttia:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 dx_i dx^i,$$

missä $f(r) = r^2(1 - \frac{r_0^d}{r^d})$, $r_0 = \mathrm{horisontti}.$

- Musta aukko jonka horisontti on taso ($d\Omega \rightarrow dx_i dx^i$).
- Asymptoottisesti ($r \rightarrow \infty \Rightarrow f(r) \rightarrow r^2$) AdS avaruus (tyhjä avaruus + kosmologinen vakio Λ)
- Mittakenttäteoria: $U(1)$ symmetria $\rightarrow$ $U(N)$ symmetria!

Yhteys?

- N kappaletta braaneja kaareuttavat avaruutta ja muodostavat mustan braanin. Mustalla braanilla on entropia S_{BH} ja lämpötilä T_H.
- Toisaalta N-braani systeemi kuvaa $U(N)$ mittakenttäteoriaa (ei gravitaatiota). Systeemillä myös entropiaa S_V.
- Löydetään $S_{BH} = S_V$! Ehdotus: Nämä teoriat duaalisia!
- Löydetty mittakenttä/gravitaatio-dualiteetti! Mittakenttäteoria laakeassa avaruudessa $\cong$ säieteoria AdS avaruudessa!

Yhteys?

- N kappaletta braaneja kaareuttavat avaruutta ja muodostavat mustan braanin. Mustalla braanilla on entropia S_{BH} ja lämpötilä T_H.
- Toisaalta N-braani systeemi kuvaa $U(N)$ mittakenttäteoriaa (ei gravitaatiota). Systeemillä myös entropiaa S_V.

- Löydetään $S_{BH} = S_V$! Ehdotus: Nämä teoriat duaalisia!
- Löydetty mittakenttä/gravitaatio-dualiteetti! Mittakenttäteoria laakeassa avaruudessa $\cong$ säieteoria AdS avaruudessa!

Kuka teki?

- 1997, Juan Maldacena ehdotti tarkkaa dualiteettia: $AdS_5 \times S^5/U(N)$, SYM, $N = 4$.
- Ensimmäinen esimerkki holografiaperiaatteesta.
- Seuraavaksi tarkastellaan yleisemmin AdS/CFT dualiteetteja. Mitä dualiteetti on?

ADS/CFT-DUALITEETTI

CFT

- CFT = konformikenttäteoria
- Kenttäteoriat Poincare-symmetrisia (Lorentz + translaatio).
- Vaaditaan myös skaalainvarianssi, $x \to \lambda x \Rightarrow$ Poincare + skaala = konformisymmetria.
- Konformikenttäteoriat eivät saa riippua mistää tietystä etäisyys (= energia) skaalasta! Esimerkkinä SYM $N = 4$, Super Yang-Mills $D = 4$.

CFT

- CFT = konformikenttäteoria
- Kenttäteoriat Poincare-symmetrisia (Lorentz + translaatio).
- Vaaditaan myös skaalainvarianssi, $x \to \lambda x \Rightarrow$ Poincare + skaala = konformisymmetria.

- Konformikenttäteoriat eivät saa riippua mistää tietystä etäisyys (= energia) skaalasta! Esimerkkinä SYM N = 4, Super Yang-Mills D = 4.

AdS -avaruus

- Anti de Sitter avaruus (AdS) on Einsteinen yhtälöiden ratkaisu:

$$S = \int dx^{d+1} \sqrt{-g}\,[R + \Lambda]$$

missä $\Lambda =$ vakio. Metriikka

$$ds^2 = -r^2 dt^2 + r^{-2} dr^2 + r^2 dx_i dx^i,$$

eli saman kuin braani ratkaisu rajalla $r \to \infty$.

- AdS_{d+1} avaruudella on myös “reuna” kun $r \to \infty$. Reuna on Minkowskin avaruus

- AdS_{d+1} symmetria on $SO(d,2)$. Reunalla $SO(d,2)$ on konformisymmetria (Poincare + skaala) $\Rightarrow$ reunalla elävän teorian pitää olla konformisymmetrinen!

Maldacena dualiteetti

- Maldacena ehdotti: säieteoria $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ avaruudessa on duaalinen mittäkenttäteorialle $\mathrm{D} = 4, \mathrm{SYM}\ \ \mathrm{N} = 4$.
- Tarkastuksia? Ainakin samat symmetriat: $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ symmetriaryhmä $SO(4,2) \times SO(6)$. Eli reunalla $\mathrm{D} = 4$ konformisymmetria!
- Toisaalta: $\mathrm{D} = 4, \mathrm{SYM}\ \ \mathrm{N} = 4$ konformaalinen eli symmetria on $SO(4,2)$. OK, mutta mistä $SO(6)$?
- Supervaraukset $\mathrm{N} = 4 \Rightarrow$ teorialla myös $SO(6)$ symmetria!

Maldacena dualiteetti

- Maldacena ehdotti: säieteoria $AdS_5 \times S^5$ avaruudessa on duaalinen mittäkenttäteorialle $D = 4, SYM \;\; N = 4$.
- Tarkastuksia? Ainakin samat symmetriat: $AdS_5 \times S^5$ symmetriaryhmä $SO(4,2) \times SO(6)$. Eli reunalla $D = 4$ konformisymmetria!
- Toisaalta: $D = 4, SYM \;\; N = 4$ konformaalinen eli symmetria on $SO(4,2)$. OK, mutta mistä $SO(6)$?
- Supervaraukset $N = 4 \Rightarrow$ teorialla myös $SO(6)$ symmetria!

Miten liitetään toisiinsa?

- Dualiteetti kertoo että

$$Z_{CFT} = \int \mathcal{D}\mathcal{O} e^{iS_{CFT}[\mathcal{O}]+i\int d^4x\phi_0(x)\mathcal{O}(x)} = Z_{\text{säie}}[\phi(x)_{r\to\infty}]$$

eli säieteorian polkuintegraali rajalla $\phi(x, r \to \infty) = \phi_0(x)$ yhtyy konfomikenttäteorian polkuintegraaliin, missä kentät $\phi_0(x)$ toimivat lähteinä operaattoreille $\mathcal{O}(x)$.

- Esimerkiksi: sähkömagneettinen kenttä A_μ toimii lähteenä sähkövirralle J_μ (operaattori $\mathcal{O}(x)$)
- Dualiteetti siis yhdistää teoriat täydellisesti toisiinsa. Myös kvanttitasolla!

´t Hooft raja

- Ei paljon apua sillä ei osata laskea mitä on $Z_{\text{säie}}$!! Onneksi voidaan laskea sentää jollain rajalla.
- $U(N)$ ´t Hooft raja: YM- teorian kytkinvakio $g_{YM} \to 0$ ja värien lukumäärä $N \to \infty$, samalla pitäen $\lambda \equiv g_{YM}^2 N$ vakiona.
- Tällä rajalla: $Z_{\text{säie}} \Rightarrow Z_{\text{klassinen,säie}}$ eli riittää tarkastella vain klassista säieteoriaa

´t Hooft raja

- Ei paljon apua sillä ei osata laskea mitä on $Z_{\text{säie}}$!! Onneksi voidaan laskea sentää jollain rajalla.
- $U(N)$ ´t Hooft raja: YM- teorian kytkinvakio $g_{YM} \to 0$ ja värien lukumäärä $N \to \infty$, samalla pitäen $\lambda \equiv g_{YM}^2 N$ vakiona.
- Tällä rajalla: $Z_{\text{säie}} \Rightarrow Z_{\text{klassinen,säie}}$ eli riittää tarkastella vain klassista säieteoriaa

raja $\lambda \longrightarrow \infty$

- Ottamalla vielä raja $\lambda \rightarrow \infty$, voidaan teoria kehittää $\frac{1}{\lambda}$ potenssisarjana.
- Tämä raja vastaa säieteorian puolella klassista supergravitaatiota: $Z_{\text{säie}} \Rightarrow Z_{\text{klassinen,sugra}}$. Klassista osataan laskea! (esim. braanit)
- Kenttäteorian puolella raja vahvasti kytketyn teoria (eli $g_{YM} \nrightarrow 0$)
- Yleensä ei pelkästään kenttäteorian puolelta osata sanoa rajasta $g_{YM} \nrightarrow 0$ mitään, mutta nyt osataan, ja käyttämällä pelkästää klassista gravitaatiota!! Upeeta!

raja $\lambda \to \infty$

- Eli tällä rajalla:

$$Z_{\mathrm{YM}} = \int \mathcal{D}\mathcal{O} e^{iS_{CFT}[\mathcal{O}] + i\int d^4x \phi_0(x)\mathcal{O}(x)} = Z_{\mathrm{klas,gr}}[\phi(x)_{r\to\infty}].$$

- Dualiteetin avulla voidaan myös laskea YM-teorian esim. korrelaattoreita:

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)\rangle = \frac{\delta^2 Z_{\text{klassinen,gr}}}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}.$$

- Jos kaikki nämä osataan laskea $\Rightarrow$ teoria ratkaistu täydellisesti

MITÄ JÄI KÄTEEN JA MITÄ SEURAAVAAN KERTAAN?

Dualiteetti

- Nähtiin että dualiteetti ei ollut aivan tuulesta temmattu!
- Löydettiin miksi mustanaukon $S_{BH} \propto A$.
- Eksakti dualiteetti muotoiltiin polkuintegraalien välille: $Z_{\text{säie}} = Z_{CFT}$.
- ´t Hooftin rajalla $\lambda \to \infty$: Klassinen (super) gravitaatio = vahvasti kytketty Yang-Mills teoria ! Todella ei-triviaali tulos.

Mitä seuraavaksi?

- Tutkitaan lisää korrelaattoreita.
- Katsotaan dualiteetin hydrodynaamista rajaa! (pitkät välimatkat, pienet energiat)
- Mitä ennusteita saadaan?