# AdS/CFT: Hydrodynamiikka

Janne Alanen

October 27, 2008

# Sisältö

KERTAUSTA

# AdS/CFT

- Holografiaperiaate: $D$ dimensionaalinen teoria, jossa esiintyy gravitaatio, voidaan kuvata $D-1$ ulotteisella teorialla, jossa ei esiinny gravitaatiota
- Säieteoriasta: massiivisia braaniratkaisuja, joihin avoimien säikeiden päät kiinnittyvät
- Avoimet säikeet braanin pinnalla $=$ YM-teoria Minkowskin avaruudessa
- Dualiteetti: säieteoria kaarevassa avaruudessa $=$ YM-teoria Minkowskin avaruudessa

- AdS: Einsteinin yhtälön ratkaisu

$$S = \int dx^{d+1} \sqrt{-g}\, [R + \Lambda]$$

- CFT: konfomikenttäteoria = skaalainvariantti ! $x \to \alpha x$
- Maldacenan AdS/CFT dualiteetti: säieteoria $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ avaruudessa duaalinen YM teorialle $\mathrm{D} = 4, \mathrm{SYM}\;\; \mathrm{N} = 4$ Minkowskin avaruudessa
- t´Hooft raja, $\lambda \to \infty$: Klassinen gravitaatio = vahvasti kytketty YM-teoria! Ei-perturbatiivinen!
- Polkuintegraali (Euklidinen):

$$Z_{\mathrm{YM}} = \int \mathcal{D}\mathcal{O} e^{-S_{CFT}[\mathcal{O}] - \int d^4 x \phi_0(x) \mathcal{O}(x)} = Z_{\mathrm{klas,gr}} \left[ \phi(x)_{r\to\infty} = \phi_0(x) \right].$$

- Eli kentät $\phi_0(x)$ toimivat lähteenä operaattoreille $\mathcal{O}(x)$ reunalla ($r \to \infty$)

- Korrelaattorit:

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)\rangle_{YM} = \frac{\delta^2 Z_{\text{klassinen,gr}}}{\delta\phi_0(x)\delta\phi_0(y)}$$

- Esim. kenttäteorian varaustiheys :

$$\left\langle J^t \right\rangle_{YM} = \rho = \frac{\delta Z_{\text{klas. maxwell kaarevassa avaruudessa}}}{\delta A_0^t}$$

# MITEN KÄYTETÄÄN?

# Lasku

- Lähdetään aktiosta kaarevassa avaruudessa, $AdS_5$ :

$$S = \int dx^\mu dr \sqrt{-g}\mathcal{L}[\phi(r, x^\mu)]$$

- t'Hooftin raja $\Rightarrow$ etsitään klassiset ratkaisut, $\phi_{cl}(r, x^\mu)$:

$$\delta S(\phi = \phi_{cl}) = 0$$

reunaehdolla:

$$\phi_{cl}(r, x^\mu) \to \phi^0(x^\mu) \text{ kun } r \to \infty$$

## Lasku

- Tässä raja $r \to \infty$ tarkoittaa sitä, että menemme $AdS$ avaruuden reunalle eli $D \to D-1$ (Reunalla elää YM-teoria)
- Seuraavaksi lasketaan aktion arvo klassisille ratkaisuille, $\phi_{cl}(r, x^\mu)$:

$$S_{cl} = \int dx^\mu dr \mathcal{L}[\phi_{cl}(r, x^\mu)]$$

ja integroidaan $r$ : n yli

$$S = \int dx^\mu KF(\phi_x^0)$$

- Missä $K = K(x^\mu)$ ja esimerkiksi $F(\phi_x^0) = \phi_x^0 \phi_x^0$
- Tästä voidaan laskea kenttäteorian korrelaattoreita:

$$Z_{YM} = e^{s + \int dx^\mu \mathcal{O} \phi_x^0} = e^{\int dx^\mu KF(\phi_x^0)} = Z_{\text{gr}}$$

tästä derivoimalla

$$\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle_{YM} \propto K$$

# Esimerkki

- Skalaarikenttä $AdS_{n+1}$ avaruudessa (Euklidinen, $m = 0$):

$$S = \int dx^n dr \sqrt{g} \partial_M \phi \partial^M \phi$$

  metriikka

$$ds^{n+1} = -r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^2 d\overline{x}$$

- Metriikassa ei horisonttia $\Rightarrow$ei lämpötilaa $T_H = 0 \Rightarrow$ vastaa kenttäteoriassa $T_{YM} = 0$

- Ratkaisemalla liikeyhtälö:

$$\partial_M(\sqrt{g}\partial^M\phi) = 0$$

reunaehdolla

$$\phi(x^M) = \phi(r, x^\mu) \to \phi^0(x^\mu)$$

- Sijoittamalla ratkaisu aktioon $S$, ja integroimalla $\int dr$ yli saadaan:

$$S = \int dx^n dx'^n \frac{\phi^0(x^\mu)\phi^0(x'^\nu)}{(x^\mu - x'^\nu)^{2n}}$$

- Tästä saadaan operaattoreille $\mathcal{O}(x)$ joille skalaarikenttä $\phi^0$ toimii lähteenä:

$$\langle \mathcal{O}(x^\mu)\mathcal{O}(x'^\nu)\rangle_{YM} = \frac{1}{(x^\mu - x'^\nu)^{2n}}$$

- Tämä voidaan laskea myös pelkästään kenttäteoriasta, joka antaa saman tuloksen!

# HYDRODYNAMIIKKA

# Hydrodynamiikka

- Voidaan ajatella, että hydrodynamiikka on efektiivinen kuvaus monimutkaiselle kenttäteorialle
- Voidaan kuvata teoriaa vain muutamalla suureella: nopeus, lämpötila, energia tiheys, viskositeetti...
- Nämä suureet voidaan sitten laskea kenttäteoriasta

# Hydroraja

- Hydrodynaaminen raja: pitkät etäisyydet ja ajat! $(x, t)$
- Fourier avaruudessa: pienet taajuudet ja momentit! $(\omega, p)$

$$\frac{\omega}{T} \ll 1 \quad \frac{q}{T} \ll 1$$

- Eli tällä rajalla: Kenttäteoria = Hydrodynamiikka

# Kenttä $\Rightarrow$ Hydro?

- Voidaan laskea korrelaattoreiden (Greenin funktioiden) hydrorajaa, ja käytetään Kubon kavaa
- Esimerkiksi, sähkönjohtavuus:

$$G^R_{xy}(\omega, p) = \int dx e^{-ipx} \langle [A_x(x), A_y(0)] \rangle$$

  tästä hydrorajalla sähkönjohtavuus

$$\sigma_{xy} = Im \left[ \frac{G^R_{xy}(\omega, 0)}{\omega} \right]_{\omega \to 0}$$

- Tai viskositeetti: $\eta = Im \left[ \frac{G^R_{xy,xy}(\omega,0)}{\omega} \right]_{\omega=0}$ missä $G^R_{xy,xy}(\omega, p) \propto \langle [T_{xy}(x), T_{xy}(0)] \rangle$
- Näistä voidaan laskea E-M tensori: $T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} + \eta \Sigma^{\mu\nu} + \ldots$

# Miten AdS/CFT?

- Tutkitaan pieniä häiriöitä kentissä $\Rightarrow$ pois tasapainotilasta.
  $A = A^0 + j$
- Lasketaan häiriöille korrelaattoreita , $\langle j(x) j(y) \rangle_{YM}$
- Voidaan ottaa hydrodynaaminen raja, ja käytetään Kubon kaavaa!!
  $\Rightarrow$ esim. $YM$- teorian sähkönjohtavuus

# Esimerkki

- E-M tensori $T^{\mu\nu} \propto \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}$, eli liitoksissa metriikkaan
- Nyt *AdS* avaruuden $T^{MN}$ , reunalla YM-teorian $T^{\mu\nu}$. Tasapainotila!
- Lisäämällä häiriöitä *AdS* avaruuden metriikkaan, $g_{\mu\nu} = g^{AdS}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \Rightarrow$ muutoksia $T^{MN}$ja $T^{\mu\nu}$!!
- Korrelaattori: $\langle h_{\mu\nu}, h_{\mu\nu} \rangle \propto \eta =$ viskositeetti

# Toinen tapa

- Äskön tehtiin momenttiavaruudessa ja käytettiin Kubon kaavaa
- Voidaan myös tehdä suoraan koordinaattiavaruudessa:

$$ds = -fdt^2 + f^{-1}dr^2 + r^2dx$$

”boostaamalla” metriikka

$$ds = -u_\mu u_\nu dt^2 + \ldots \;\; u^\mu = (1, 0)$$

- Lisätään “nopeuteen” häiriö, $v^\mu$, joka riippuu reunakoordinaateista: $u^\mu = (1, 0) + v^\mu(x^\mu)$
- Nyt vaaditaan, että uusi metriikka on myös Einsteinin yhtälöiden ratkaisu, $S = \int \sqrt{g}(R + \Lambda)$
- Saadaan energia-momentti tensori reunalla $T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} + \Sigma^{\mu\nu}_{(1)} + G^{\mu\nu}_{(2)} + \ldots$ (gradientti kehitelmä)
- Ja tämän jatkuvuusyhtälö: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

# Kertausta

- Tutkitaan häiriöitä tietyn taustaratkaisun päällä
- Nämä häiriöt vastaavat siirtymistä pois tasapainotilasta
- Lasketaan YM-teorian korrelaattoreita, lineaarisia responsseja: Ennusteita esim SYM N=4 viskositeetille... ym.

# MITÄ TUTKITAAN?

# Ennusteita ja tarkastuksia

- Tulokset mitä $AdS/CFT$ dualiteetista saadaan on ennusteita vastaavalle YM-teorialla (t'Hooft raja)
- Energia-momentti tensori toiseen kertalukuun gradientti kehitelmässä: Voidaan testata RHIC:ssä
- Mm. viskositeetti/entropia$=\eta/s = 1/4\pi$, löydetty myös YM-teorista
- Tällä hetkellä tutkitaan paljon kiinteän olomuodon ongelmia, dualiteettia käyttäen
- mm. Suprajohtavuus, Hallin ilmiö, Magnetohydrodynamiikka...
- Yllättävä yhteys: säieteoria $\Rightarrow$kiinteän aineen fysiikkaa!