WMAP ja kosmologiset parametrit

Laudatur-seminaari

Mikko Lavinto
25.11.2008

Viime kerralla:

- Käytiin lävitse yksinkertaisin malli suuren skaalan rakenteen synnylle – yhden skalaarikentän inflaatio.

- Esiteltiin yleiset inflaatiomallia kuvaavat parametrit – skalaariperturbaation tehospektri $\mathcal{P}_S(k_0)$, sen spektri-indeksi n_S ja spektri-indeksin juoksu $dn_S/d\ln k$, sekä gravitaatioaaltojen tehospektri $\mathcal{P}_\mathcal{T}$ ($r \equiv 4\mathcal{P}_\mathcal{T}/\mathcal{P}_S$) .

- Liitettiin inflaatiomalli havaintoihin suht naiivilla (sekä hiukan epäselvällä) tavalla.

Tällä kerralla:

- Oletetaan inflaation parametrit tunnetuiksi.
- Lähdetään selvittämään, miten havainnoista saadaan lasketuksi todennäköisyyksiä.
- Tahdotaan taas päätyä tilanteeseen, jossa parametrijoukolle $\{(\mathcal{P}_S(k_0)), n_S, dn_S/d\ln k, r\}$ saadaan lasketuksi jonkinlainen todennäköisyys joka kuvaa datan ja mallin yhteensopivuutta.

Havainnoista

- Mikroaaltotaustasta havaitaan lämpötilavaihteluita $\frac{\delta T(\mathbf{n})}{T}$.
- $\mathbf{n}$ kertoo tarkasteltavan pisteen taivaalla ($|\mathbf{n}| = 1$)

Lämpötilavaihtelut saadaan liitetyksi metriikan häiriöön ja sitä kautta kulmatehospektriin C_l: (Sachs-Wolfe)

$$\frac{\delta T(\mathbf{n})}{T} = -\frac{1}{5}\mathcal{R}$$

Bayesin teoreema

$$P(\mathbf{p}|\mathbf{d}) \propto \mathcal{L}(\mathbf{d}|\mathbf{p})P(\mathbf{p})$$

- ∘ $P(\mathbf{p})$ on d:stä riippumaton todennäköisyys parametreille.
- ∘ $\mathcal{L}(\mathbf{d}|\mathbf{p})$ on *uskottavuus* (likelihood) sille, että mittaus antaa tuloksen d, jos p.
- ∘ $P(\mathbf{p}|\mathbf{d})$ on todennäköisyys sille, että havaintojen d valossa malli p on oikein.
- ∘ Kulmatehospektrit C_l^M mitattu, C_l^T teorian ennustama.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(C_l^M|C_l^T)$$

- Esim.

$$-2\ln\mathcal{L}(C_l^M|C_l^T) \equiv \chi^2 \propto (C_l^M - C_l^T)^2$$

Uskottavuuden maksimointi

- Arvaus: $\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{d}|\mathbf{p})}{\partial p_i} = 0$
- Toki, mutta entä kun $\mathcal{L}$ ei ole analyyttisesti tunnettu parametrien p_i avulla?
- Kaksi vaihtoehtoa:
  - Lasketaan arvoja $\mathcal{L}$:lle ja valitaan suurin arvo. (Ongelmia, jos $\dim(\mathbf{p}) \gtrsim 5$)
  - Markovin Ketju-Monte Carlo-simulaatio.

Markovin ketju? Monte Carlo?

Markovin ketju-Monte Carlo-simulaatio toimii seuraavaan tapaan:

1. Valitaan lähtöpaikka parametriavaruudessa, $\mathbf{p}_0$.

2. Lasketaan arvo $\mathcal{L}(\mathbf{d}|\mathbf{p_0})$.

3. Siirrytään pisteeseen $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \delta\mathbf{p}_0$.

4. Lasketaan $\mathcal{L}(\mathbf{d}|\mathbf{p}_1)$.

5. Siirretään ketju pisteeseen $\mathbf{p}_1$ todennäköisyydellä
$$\min\left(1, \frac{\mathcal{L}(\mathbf{d}|\mathbf{p}_1)}{\mathcal{L}(\mathbf{d}|\mathbf{p}_0)}\right)$$

6. Toistetaan N kertaa.

Ketjun kulku

Ainoaksi ongelmaksi jää uskottavuusfunktion $\mathcal{L}$ ja tehtyjen hyppyjen $\delta\mathbf{p}_i$ määrittäminen.

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}|\mathbf{p}) = (\det \mathbf{C})^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{d}\right]$$

- Käytännössä määriteltävä sen mukaan, mikä toimii.

- Esim. 1. vuoden WMAP:

$$-2\ln\mathcal{L} = \sum_l (2l+1)\left[\ln\left(\frac{C_l^T}{C_l^M}\right) + \frac{C_l^M}{C_l^T} - 1\right]$$

- Hypyt yleensä aina tehdään satunnaiseen suuntaan gaussisella pituusjakaumalla.

Askeleen pituus ja ketjun levittäytyminen

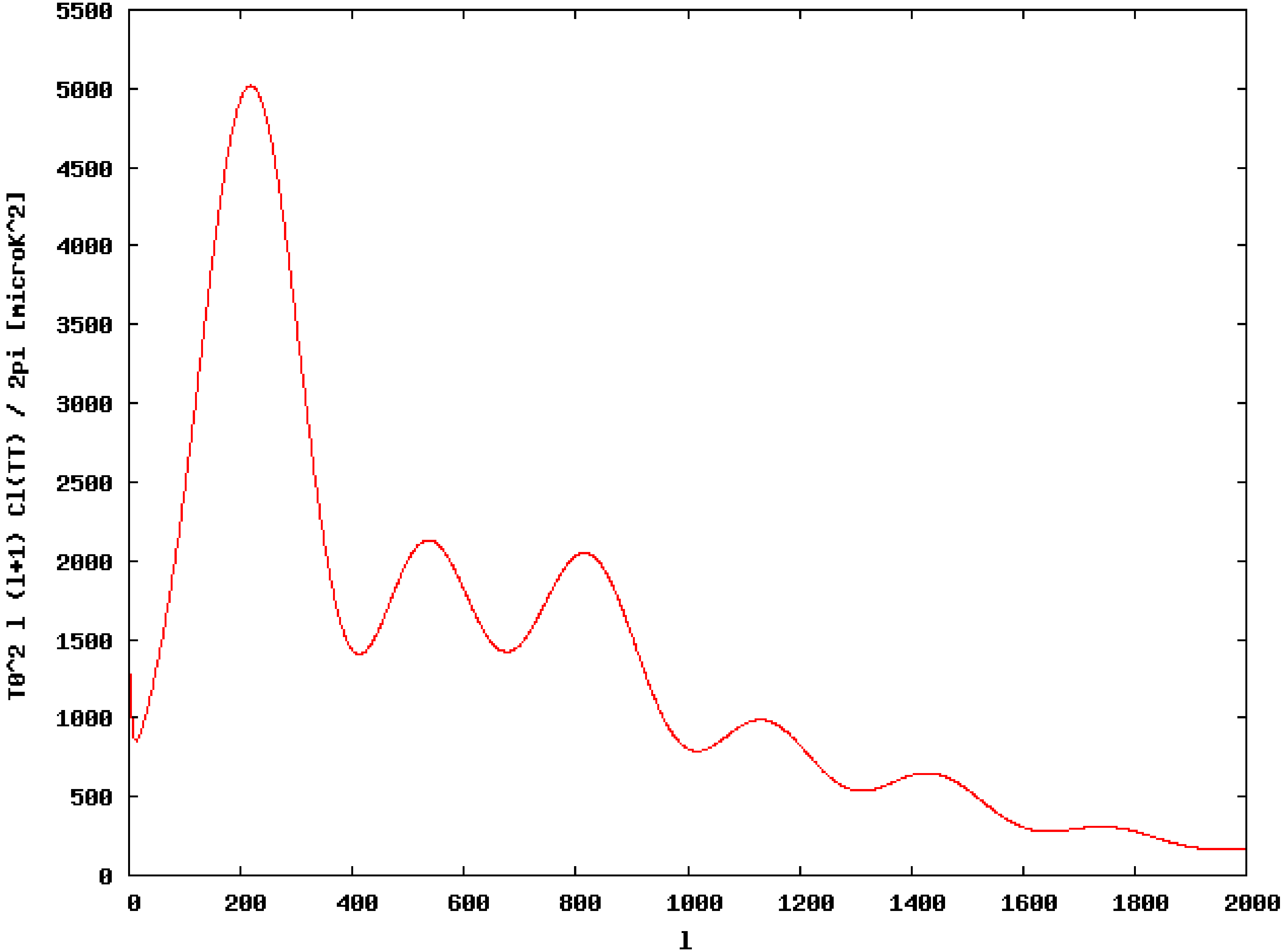
- Ketjun tarkoitus on kattaa koko parametriavaruus
- Liian suuri askeleen pituus $\sigma_i \rightarrow \infty$, ja ketju liikkuu liian hitaasti (suuret askeleet, pieni tn. askeleelle).
- Sama pätee jos $\sigma_i \rightarrow 0$ (pienet askeleet, suuri tn.).
- Hyvä tapa selvittää ketjun levittäytyminen parametriavaruuteen on ajaa M ketjua samanaikaisesti
- Ketjut päättyvät, kun eri aloituspisteistä lähteneet ketjut muistuttavat riittävän paljon toisiaan.

Kosmologiset parametrit ja *oikea* kulmatehospektri

- Kulmatehospektriin vaikuttavat tietysti inflaation määräämät 4 parametria $\{(\mathcal{P}_S(k_0)), n_S, dn_S/d\ln k, r\}$.

- Lisäksi paljon muuta – maailmankaikkeuden ainesisältö, optinen syvyys, jne.

- Lämpimän plasman kineettiset ominaisuudet luovat lisää rakennetta kulmatehospektriin.


T0^2 l (l+1) Cl(TT) / 2pi [microK^2]
5500
5000
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
l

Degeneraatio

- Vain yksi käyrä $\rightarrow$ äärellinen määrä informaatiota.
- Osa parametriavaruudesta voi olla degeneroitunut (erityisesti jos parametrien määrää nostetaan)
- Kaksi asiaa auttaa:
  - Parametrien ovela valinta
  - Useampi datajoukko

Tuloksia?

- Tietyn parametrijoukon kanssa saadaan yksinkertainen numero, joka kertoo kuinka todennäköinen ko. malli on.

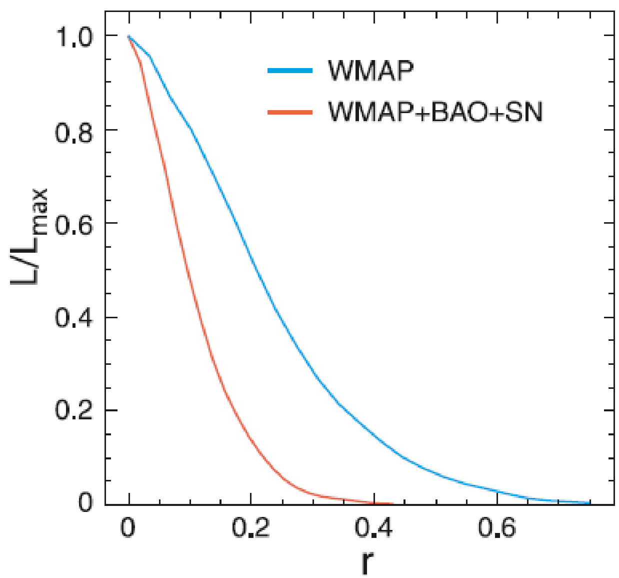
- Esim. WMAP1,
  - $V(\phi) = \lambda\phi^4$: $\chi^2 = 1480$
  - Paras sovitus inflaatiolle: $\chi^2 = 1464$

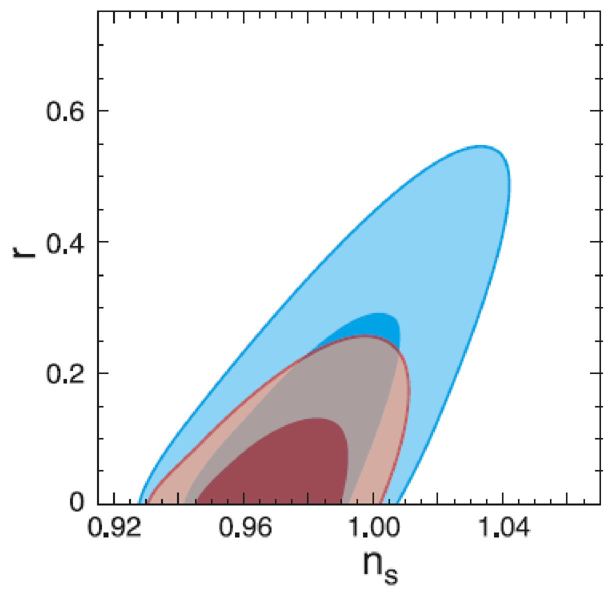
$$\mathcal{L}/\mathcal{L}_0 = e^{-\Delta\chi^2/2} = e^{-8}$$

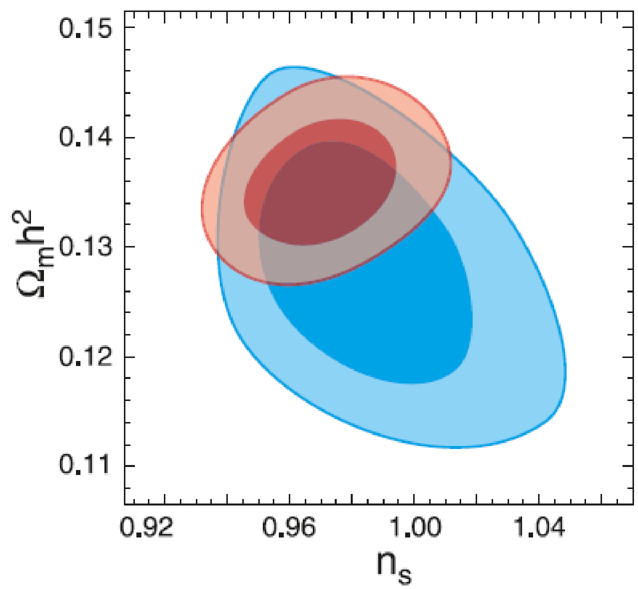
- Lisäksi voidaan tarkastella suurempaa parametrijoukkoa.

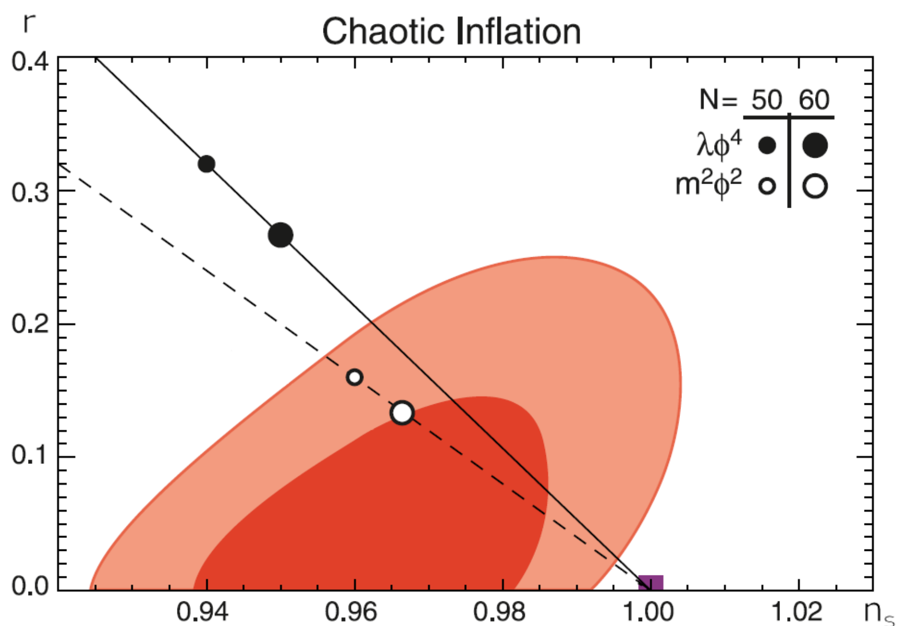
- Esim. voidaan etsiä paras (todennäköisin) arvo n_S:lle, kun r ja $dn_S/d\ln k$ on kiinnitetty.

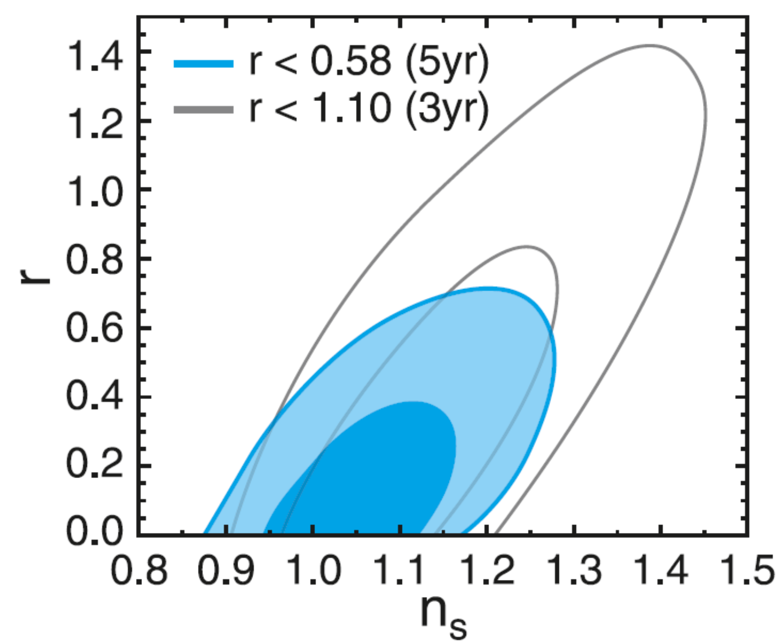
Tuloksia


L/L_max
r
WMAP
WMAP+BAO+SN
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6


r
n_s
0.6
0.4
0.2
0
0.92
0.96
1.00
1.04


Ω_m h^2
n_s
0.15
0.14
0.13
0.12
0.11
0.92
0.96
1.00
1.04


Chaotic Inflation
r
n_s
N= 50 60
λφ^4
m^2φ^2
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0.94
0.96
0.98
1.00
1.02


r < 0.58 (5yr)
r < 1.10 (3yr)
r
n_s
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5

Tuloksia

WMAPin antamat numerot (uudelleen)

Malli	Parametri	WMAP+BAO+SN
Potenssilaki, $r = 0$	n_S	0.960 ± 0.014
Juokseva n_S, $r = 0$	n_S	1.022 ± 0.043
	$dn_S/d\ln k$	-0.032 ± 0.021
Potenssilaki, $r \neq 0$	n_S	0.968 ± 0.015
	r	< 0.20
Juokseva n_S, $r \neq 0$	n_S	1.093 ± 0.069
	r	< 0.54
	$dn_S/d\ln k$	-0.055 ± 0.028

Tuloksia

- Entäpä viime kerran omituinen kaava

$$\delta_H(n_S, r, k = 0.05\mathrm{Mpc}^{-1}) = 1.927\times 10^{-5}\frac{\exp[(-1.24 + 1.04r)(1 - n_S)]}{\sqrt{1 + 0.53r}}$$

- Antaa marginalisoinnissa käytetyn δ_H:n arvon $\sim 3\%$ tarkkuudella.

- Mitattu tulos δ_H:lle on sen todennäköisyysjakauman keskiarvo ($\sim$ suurin uskottavuus).

- Vertailu kertoo miten kaukana oikeasta tuloksesta ollaan pelkkien numeroiden kanssa.

- Näyttäisi toimivan!

Yhteenveto

- Lämpötilaerot mikroaaltotaustassa liittyvät suoraan kaarevuusperturbaatioon
- Teoreettinen kulmatehospektri C_l^T riippuu useasta parametrista $\rightarrow$ parametrien valinta, degeneraatio
- Uskottavuusfunktio $\mathcal{L}(C_l^M|C_l^T)$ kertoo todennäköisyyden ko. parametreille.
- Monte Carlo-simulaatiolla löydetään suurin $\mathcal{L} \rightarrow$ parhaat arvot parametreille.
- Parametrien välillä on degeneraatiota, joten pelkkiin numeroihin tuijottaminen saattaa johtaa harhaan!