

WMAP ja inflaatio

Laudatur-seminaari

Mikko Lavinto

4.11.2008

- Inflaatio
- Skalaarikenttä
- Tehospektrit
- Mikroaaltotaustaan vertailu
- Esimerkki

Homogeeninen ja isotrooppinen maailmankaikkeus \iff FRW-metriikka

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]$$

Einsteinin yhtälöstä saadaan laskemalla ns. Friedmannin yhtälöt:

$$H^2 = \frac{\rho}{3M^2} - \frac{k}{a^2}$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3p}{6M^2}$$

$$M \equiv (8\pi G)^{-1/2}$$
$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

Yhtälöt kertovat miten metriikka käyttäytyy jos energiatiheys ja paine tunnetaan.

Inflaation aikana skaalatekijä a kasvaa horisonttia H^{-1} nopeammin.

⇒

- Maailmankaikkeuden kaarevuussäde kasvaa paljon horisonttia suuremmaksi ($\Omega = \rho/\rho_{crit} \simeq 1$).
- Näkyvä maailmankaikkeus on alunperin lähtöisin kausaalisesti kytkettyä alueesta.

Eksponentiaalinen laajeneminen: $a \propto e^{H_0 t} \Leftrightarrow H = H_0$

Tällöin $w = \frac{p}{\rho} = -1$

Lagrangen tiheys

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)$$

Energiatensori saadaan Legendren muunnoksella

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi + g^{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi$$

Lepokoordinaatistossa $T^{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ joten

$$\rho_\phi = T^{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)$$

$$p_\phi = \frac{1}{3}\sum T^{ii} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2 - V(\phi)$$

Homogeeniselle kentälle ($\nabla\phi = 0$) $w \simeq -1$ kun $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$!

Kentän liikeyhtälö saadaan sijoittamalla paine ja energiatiheys Friedmannin yhtälöihin ja ratkomalla

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \nabla^2\phi + V'(\phi) = 0$$

$3H\dot{\phi}$ avaruuden laajenemisesta johtuva kitkatermi – kentän liike on hidasta kun H on riittävän suuri.

Riittävän suuri energiatiheys takaa slow rollin: $H^2 \propto \rho \propto V(\phi)$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$$

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$$

$$\epsilon \equiv \frac{M^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1$$

$$\eta \equiv M^2 \frac{V''}{V} \ll 1$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t)$$

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \delta\phi(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

Tehospektrin \mathcal{P}_ϕ määritelmä:

$$\langle \delta\phi(\mathbf{k}, t) \delta\phi(\mathbf{k}', t) \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\phi \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Kentän liikeyhtälö ratkaisemalla saadaan

$$\mathcal{P}_\phi = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2$$

Häiriöt kentän arvossa siirtyvät metriikkaan, käsitellään kahdessa osassa:

- *Skalaariosa* $\sim \delta\rho$
- *Tensoriosa* (gravitaatioaalto)

Skalaariosan kuvaamiseen käytetään otusta nimeltä kaarevuusperturbaatio. Inflaation aikana $\mathcal{R} = -\frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi$.

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2 \mathcal{P}_{\phi} = \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2$$

Tensoriosa näyttää kahdelta skalaarikentältä,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = \frac{2}{M^2} \mathcal{P}_{\phi} = \frac{2}{M^2} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2$$

Slow roll -approksimaation avulla spektrit saadaan yksikäsitteisesti potentiaalin avulla

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \simeq \frac{1}{24\pi^2 M^4} \frac{V}{\epsilon}$$

$$\mathcal{P}_T = \frac{2}{M^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \simeq \frac{1}{6\pi^2 M^4} V$$

$$n_S - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_S}{d \ln k} \simeq 2\eta - 6\epsilon$$

$$r = \frac{4\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} \simeq 16\epsilon$$

$$\frac{dn_S}{d \ln k} \simeq -16\epsilon\eta + 24\epsilon^2 + 2M^4 \frac{V''''(\phi)V'(\phi)}{V^2}$$

Kaikki lasketaan hetkellä $aH = k$ (horisontin ylitys).

Määritellään avaruuden e-kertaistumisten lukumäärä horisontin ylityksen ja inflaation lopun välillä

$$N \equiv \ln \frac{a(t_*)}{a(t_l)} = \int_{t_l}^{t_*} H dt \simeq \frac{1}{M^2} \int_{\phi_l}^{\phi_*} \frac{V}{V'} d\phi$$

Kentän ϕ arvo horisontin ylityksen hetkellä voidaan laskea tämän avulla:

1. Lasketaan slow roll -parametrit
2. Lasketaan kentän arvo kun inflaatio päättyy ($\max(\epsilon, \eta) \sim 1$)
3. Lasketaan kentän arvo kun mikroaaltotaustassa näkyvät perturbaatiot ylittivät horisontin.
4. Annetaan parametrien ϵ ja η arvot horisontin ylityksen hetkellä N :n ja ϕ_l :n avulla.

Ylimääräinen rajoite teorioille saadaan kirjoitettua sovitusfunktion muotoon,

$$\delta_H(n_S, r, k = 0.05 \text{Mpc}^{-1}) = 1.927 \times 10^{-5} \frac{\exp[(-1.24 + 1.04r)(1 - n_S)]}{\sqrt{1 + 0.53r}}$$

Mikroaaltotaustasta havaitaan fotonien lämpötila- ja polarisaatioeroja. Häiriöiden arvot mikroaaltotaustan syntyhetkellä saadaan siirtofunktiolla

\mathcal{T}

$$C(l) = 4\pi \int_0^\infty \mathcal{T}_\Theta^2(k, l) \mathcal{P}_\mathcal{R} \frac{dk}{k}$$

⋮

Vaatii numeerista laskentaa, mutta voidaan aina tehdä.

Malli	WMAP:	
	Parametri	WMAP+BAO+SN
Potenssilaki, $r = 0$	n_S	0.960 ± 0.014
Juokseva n_S , $r = 0$	n_S	1.022 ± 0.043
	$dn_S/d \ln k$	-0.032 ± 0.021
Potenssilaki, $r \neq 0$	n_S	0.968 ± 0.015
	r	< 0.20
Juokseva n_S , $r \neq 0$	n_S	1.093 ± 0.069
	r	< 0.54
	$dn_S/d \ln k$	-0.055 ± 0.028

Lisäksi $\delta_H(k = 0.002 \text{Mpc}^{-1}) \equiv 2/5 \sqrt{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} = (1.983 \pm 0.038) \times 10^{-5}$

Otetaan esimerkkipotentiali muotoa

$$V(\phi) = V_0 \left(1 - \lambda \frac{\phi^p}{M^p} \right)$$

Slow roll -parametrit ovat

$$\epsilon \simeq \frac{p^2 \lambda^2}{2} \left(\frac{\phi}{M} \right)^{2(p-1)} \quad \eta \simeq -\lambda p(p-1) \left(\frac{\phi}{M} \right)^{p-2}$$

$$\epsilon \lesssim \eta^2 \ll |\eta| \Rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \gg \mathcal{P}_{\mathcal{T}}$$

$$2M^4 \frac{V''''V'}{V^2} \simeq 2\lambda^2 p^2 (p-1)(p-2) \left(\frac{\phi}{M} \right)^{2p-4} \ll \eta$$

$$r \simeq dn_S / d \ln k \simeq 0$$

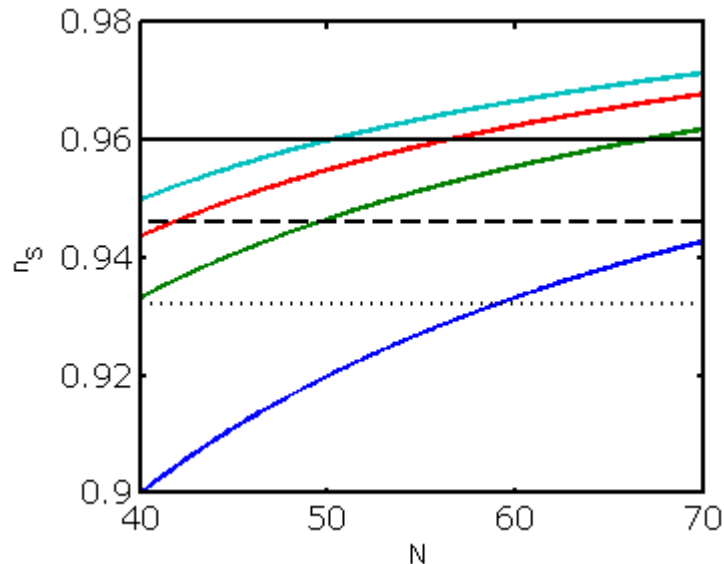
$$\phi_l \sim \frac{M}{[\lambda p(p-1)]^{1/(p-2)}}$$

Kentän arvo häiriön \mathcal{R}_k ylittäessä horisontin saadaan laskemalla

$$N \simeq \frac{1}{M^2} \int_{\phi_l}^{\phi_*} \frac{V}{V'} d\phi \simeq \frac{M^{p-2}}{\lambda p(p-2) \phi_*^{p-2}}$$

$$\epsilon_* = \frac{p^2 \lambda^2}{2} \left(\frac{\phi_*}{M} \right)^{2p-2} = \frac{p^2 \lambda^2}{2} \left[\frac{1}{\lambda p(p-2) N} \right]^{\frac{2p-2}{p-2}}$$

$$\eta_* = -\lambda p(p-1) \left(\frac{\phi_*}{M} \right)^{p-2} = -\frac{1}{N} \frac{p-1}{p-2}$$



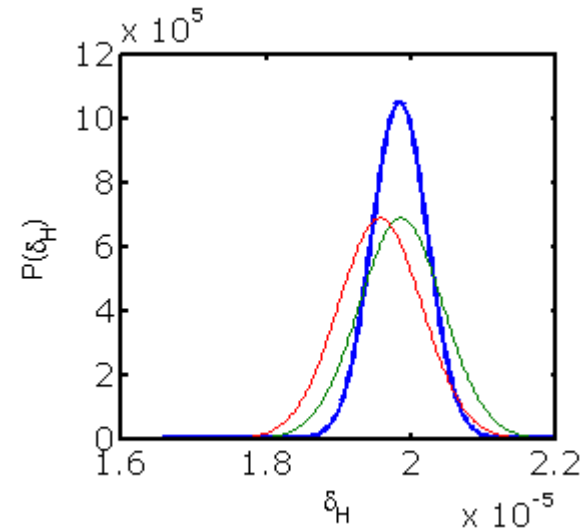
$$n_S = 1 - \frac{2}{N} \frac{p-1}{p-2}$$

Lisäksi

$$\delta_H(n_S, r, k = 0.05 \text{Mpc}^{-1}) = 1.927 \times 10^{-5} \frac{\exp[(-1.24 + 1.04r)(1 - n_S)]}{\sqrt{1 + 0.53r}}$$

antaa ylimääräisen rajoitteen
inflaatiomallille, jota voi verrata
mitattuun arvoon

$$\delta_H(k = 0.002 \text{Mpc}^{-1}) = (1.983 \pm 0.038) \times 10^{-5}.$$



p	$\delta_H(k = 0.05 \text{Mpc}^{-1})$	$\delta_H(k = 0.002 \text{Mpc}^{-1})$
3	1.745×10^{-5}	1.985×10^{-5}
5	1.804×10^{-5}	1.965×10^{-5}
10	1.822×10^{-5}	1.959×10^{-5}
$\rightarrow \infty$	1.834×10^{-5}	1.956×10^{-5}

Lopulta saadaan todennäköisyys sille, että data kuvaa ko. mallia

p	N	P_δ	P_n	P_r	P	x
3	60	~ 1	0.027	1	0.027	1.9σ
3	50	~ 1	0.002	1	0.002	2.8σ
\vdots						
$\rightarrow \infty$	60	0.68	1	1	0.68	0.4σ
$\rightarrow \infty$	50	0.72	0.62	1	0.45	0.8σ

- Inflatoni on kvanttikenttä \Rightarrow Perus kvanttihäiriöt kentän arvossa.
- Maailmankaikkeus laajenee melkein eksponentiaalisesti \Rightarrow Häiriöt muodostavat epätriviaalin spektrin.
- Slow rollin ollessa voimassa, spektrin muoto on yksikäsitteisesti määrätty potentiaalin avulla.
- Metriikan häiriöt pysyvät horisontin ulkopuolella melkein vakioina.
- Häiriöt nähdään mikroaaltotaustassa ja suuren skaalan rakenteessa.