Kvanttikenttäteoriaa epäkommutatiivisessa aika-avaruudessa

Matti Raasakka

Helsingin yliopisto

Laudaturseminaari
18.11.2008

“Every sentence I utter must be understood not as an affirmation, but as a question.”
-Niels Bohr

Motivointi

- Semiklassinen ajatuskoe:
  kvanttimekaniikka + yleinen suhteellisuusteoria
  $\Rightarrow$ aaltofunktion lokalisaatio $\sim$ energiatiheyden odotusarvo
  + energiatiheys $\sim$ aika-avaruuden kaarevuus
  $\Rightarrow$ absoluuttinen rajoitus tilojen lokalisaatiolle
  $\Rightarrow$ aika-avaruudella ei selvää fysikaalista merkitystä tietyn lokalisaatioskaalan alapuolella

Motivointi

- Semiklassinen ajatuskoe:
  kvanttimekaniikka + yleinen suhteellisuusteoria
  $\Rightarrow$ aaltofunktion lokalisaatio $\sim$ energiatiheyden odotusarvo
  + energiatiheys $\sim$ aika-avaruuden kaarevuus
  $\Rightarrow$ absoluuttinen rajoitus tilojen lokalisaatiolle
  $\Rightarrow$ aika-avaruudella ei selvää fysikaalista merkitystä tietyn lokalisaatioskaalan alapuolella
- Kvantitatiivinen analyysi
  $\Rightarrow (\Delta x^{\mu})(\Delta x^{\nu}) \gtrsim \lambda_{Planck}^2, \lambda_{Planck} \sim 10^{-35} m$

Motivointi

- Semiklassinen ajatuskoe:
  kvanttimekaniikka + yleinen suhteellisuusteoria
  $\Rightarrow$ aaltofunktion lokalisaatio $\sim$ energiatiheyden odotusarvo
  + energiatiheys $\sim$ aika-avaruuden kaarevuus
  $\Rightarrow$ absoluuttinen rajoitus tilojen lokalisaatiolle
  $\Rightarrow$ aika-avaruudella ei selvää fysikaalista merkitystä tietyn lokalisaatioskaalan alapuolella
- Kvantitatiivinen analyysi
  $\Rightarrow (\Delta x^\mu)(\Delta x^\nu) \gtrsim \lambda_{Planck}^2, \lambda_{Planck} \sim 10^{-35} m$
- Asetetaan $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$, missä $|\theta^{\mu\nu}| \sim \lambda_{Planck}^2$
  $\Rightarrow$ Johtaa yllämainittuun epätarkkuusperiaatteeseen
  $\Rightarrow$ Aika-avaruus epäkommutatiivinen

Motivointi

- Semiklassinen ajatuskoe:
  kvanttimekaniikka + yleinen suhteellisuusteoria
  $\Rightarrow$ aaltofunktion lokalisaatio $\sim$ energiatiheyden odotusarvo
  + energiatiheys $\sim$ aika-avaruuden kaarevuus
  $\Rightarrow$ absoluuttinen rajoitus tilojen lokalisaatiolle
  $\Rightarrow$ aika-avaruudella ei selvää fysikaalista merkitystä tietyn lokalisaatioskaalan alapuolella
- Kvantitatiivinen analyysi
  $\Rightarrow (\Delta x^{\mu})(\Delta x^{\nu}) \gtrsim \lambda_{Planck}^2$, $\lambda_{Planck} \sim 10^{-35} m$
- Asetetaan $[\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu}$, missä $|\theta^{\mu\nu}| \sim \lambda_{Planck}^2$
  $\Rightarrow$ Johtaa yllämainittuun epätarkkuusperiaatteeseen
  $\Rightarrow$ Aika-avaruus epäkommutatiivinen
- Vastaava epäkommutatiivisuus löytyy myös säieteoriasta matalilla energioilla.

Motivointi

- Semiklassinen ajatuskoe:
  kvanttimekaniikka + yleinen suhteellisuusteoria
  $\Rightarrow$ aaltofunktion lokalisaatio $\sim$ energiatiheyden odotusarvo
  + energiatiheys $\sim$ aika-avaruuden kaarevuus
  $\Rightarrow$ absoluuttinen rajoitus tilojen lokalisaatiolle
  $\Rightarrow$ aika-avaruudella ei selvää fysikaalista merkitystä tietyn lokalisaatioskaalan alapuolella
- Kvantitatiivinen analyysi
  $\Rightarrow (\Delta x^\mu)(\Delta x^\nu) \gtrsim \lambda_{Planck}^2$, $\lambda_{Planck} \sim 10^{-35} m$
- Asetetaan $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$, missä $|\theta^{\mu\nu}| \sim \lambda_{Planck}^2$
  $\Rightarrow$ Johtaa yllämainittuun epätarkkuusperiaatteeseen
  $\Rightarrow$ Aika-avaruus epäkommutatiivinen
- Vastaava epäkommutatiivisuus löytyy myös säieteoriasta matalilla energioilla.
- Herää toivo kvanttikenttäteorioiden luonnollisesta regularisaatiosta. (alaraja pituudelle $\sim$ yläraja liikemäärälle)

Weylin operaattori

- Weylin operaattori:

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} = \int d^D x \, f(x) \hat{\Delta}(x)$$

missä

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{-ik_\mu x^\mu} = \text{“}\delta^D(\hat{x}^\mu - x^\mu)\text{”}$$

Weylin operaattori

- Weylin operaattori:

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} = \int d^D x \; f(x) \hat{\Delta}(x)$$

missä

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{-ik_\mu x^\mu} = \text{``}\delta^D(\hat{x}^\mu - x^\mu)\text{''}$$

- Saadaan vastaavuus $f(x) \leftrightarrow \hat{\mathcal{W}}[f]$.
Esim. $\hat{\mathcal{W}}[x^\mu] = \hat{x}^\mu$, $\hat{\mathcal{W}}[e^{ik_\mu x^\mu}] = e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}$

- Voidaan myös määritellä derivaattaoperaattorit:
  $[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}^\nu] = \delta_\mu^\nu$, $[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0$

- Voidaan myös määritellä derivaattaoperaattorit:
  $[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}^\nu] = \delta_\mu^\nu$, $[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0$
  $\Rightarrow [\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[f]] = \hat{\mathcal{W}}[\partial_\mu f]$, $e^{iy^\mu \hat{\partial}_\mu} \hat{\Delta}(x) e^{-iy^\mu \hat{\partial}_\mu} = \hat{\Delta}(x+y)$

- Voidaan myös määritellä derivaattaoperaattorit:
$[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}^\nu] = \delta^\nu_\mu$, $[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0$
$\Rightarrow [\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[f]] = \hat{\mathcal{W}}[\partial_\mu f]$, $e^{iy^\mu \hat{\partial}_\mu} \hat{\Delta}(x) e^{-iy^\mu \hat{\partial}_\mu} = \hat{\Delta}(x+y)$
$\Rightarrow \mathrm{Tr}\, \hat{\Delta}(x) = 1$

- Voidaan myös määritellä derivaattaoperaattorit:
$[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}^\nu] = \delta^\nu_\mu$, $[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0$
$\Rightarrow [\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[f]] = \hat{\mathcal{W}}[\partial_\mu f]$, $e^{iy^\mu \hat{\partial}_\mu} \hat{\Delta}(x) e^{-iy^\mu \hat{\partial}_\mu} = \hat{\Delta}(x+y)$
$\Rightarrow \mathrm{Tr}\, \hat{\Delta}(x) = 1$
$\Rightarrow \mathrm{Tr}\, \hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x\, f(x)$

- Voidaan myös määritellä derivaattaoperaattorit:
  $[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}^\nu] = \delta_\mu^\nu$, $[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0$
  $\Rightarrow [\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[f]] = \hat{\mathcal{W}}[\partial_\mu f]$, $e^{iy^\mu \hat{\partial}_\mu} \hat{\Delta}(x) e^{-iy^\mu \hat{\partial}_\mu} = \hat{\Delta}(x+y)$
  $\Rightarrow \mathrm{Tr}\ \hat{\Delta}(x) = 1$
  $\Rightarrow \mathrm{Tr}\ \hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x\ f(x)$
- Olettaen, että $\exists \theta^{-1}$, saadaan myös $\mathrm{Tr}[\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y)] = \delta^D(x-y)$

- Voidaan myös määritellä derivaattaoperaattorit:
  $[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}^\nu] = \delta_\mu^\nu$, $[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0$
  $\Rightarrow [\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[f]] = \hat{\mathcal{W}}[\partial_\mu f]$, $e^{iy^\mu \hat{\partial}_\mu} \hat{\Delta}(x) e^{-iy^\mu \hat{\partial}_\mu} = \hat{\Delta}(x+y)$
  $\Rightarrow \mathrm{Tr}\ \hat{\Delta}(x) = 1$
  $\Rightarrow \mathrm{Tr}\ \hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x\ f(x)$
- Olettaen, että $\exists \theta^{-1}$, saadaan myös $\mathrm{Tr}[\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y)] = \delta^D(x-y)$
  $\Rightarrow f(x) = \mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\Delta}(x)]$

- Voidaan myös määritellä derivaattaoperaattorit:
  $[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}^\nu] = \delta^\nu_\mu$, $[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0$
  $\Rightarrow [\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[f]] = \hat{\mathcal{W}}[\partial_\mu f]$, $e^{iy^\mu \hat{\partial}_\mu} \hat{\Delta}(x) e^{-iy^\mu \hat{\partial}_\mu} = \hat{\Delta}(x+y)$
  $\Rightarrow \mathrm{Tr}\ \hat{\Delta}(x) = 1$
  $\Rightarrow \mathrm{Tr}\ \hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x\ f(x)$
- Olettaen, että $\exists \theta^{-1}$, saadaan myös $\mathrm{Tr}[\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y)] = \delta^D(x-y)$
  $\Rightarrow f(x) = \mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\Delta}(x)]$
  $\Rightarrow$ Vastaavuus $f(x) \leftrightarrow \hat{\mathcal{W}}[f]$ yksi yhteen.

Moyal-tulo

- $\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g]$, missä

$$
\begin{aligned}
(f \star g)(x) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k') e^{-\frac{i}{2} k_\mu \theta^{\mu\nu} k'_\nu} e^{ik_\mu x^\mu} e^{ik'_\mu x^\mu} \\
&= f(x) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu} g(x)
\end{aligned}
$$

on ns. Moyal-tulo.

Moyal-tulo

- $\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g]$, missä

$$\begin{aligned}(f \star g)(x) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k') e^{-\frac{i}{2} k_\mu \theta^{\mu\nu} k'_\nu} e^{ik_\mu x^\mu} e^{ik'_\mu x^\mu} \\ &= f(x) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu} g(x)\end{aligned}$$

  on ns. Moyal-tulo.
- Saadaan epäkommutatiivisia koordinaatteja vastaava algebra kommutatiivisessa aika-avaruudessa muokkaamalla kenttien tuloa (algebraisomorfia).

Moyal-tulo

- $\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g]$, missä

$$
\begin{aligned}
(f \star g)(x) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k') e^{-\frac{i}{2} k_\mu \theta^{\mu\nu} k'_\nu} e^{i k_\mu x^\mu} e^{i k'_\mu x^\mu} \\
&= f(x) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu} g(x)
\end{aligned}
$$

  on ns. Moyal-tulo.
- Saadaan epäkommutatiivisia koordinaatteja vastaava algebra kommutatiivisessa aika-avaruudessa muokkaamalla kenttien tuloa (algebraisomorfia).
- Epäkommutatiivinen lokaalius $\sim$ Kommutatiivinen epälokaalius

Moyal-tulo

- $\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g]$, missä

$$\begin{aligned}(f \star g)(x) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k') e^{-\frac{i}{2} k_\mu \theta^{\mu\nu} k'_\nu} e^{ik_\mu x^\mu} e^{ik'_\mu x^\mu} \\ &= f(x) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu} g(x)\end{aligned}$$

  on ns. Moyal-tulo.
- Saadaan epäkommutatiivisia koordinaatteja vastaava algebra kommutatiivisessa aika-avaruudessa muokkaamalla kenttien tuloa (algebraisomorfia).
- Epäkommutatiivinen lokaalius $\sim$ Kommutatiivinen epälokaalius
- Moyal-sulut: $[f, g]_\star(x) := (f \star g - g \star f)(x)$
  $\Rightarrow [x^\mu, x^\nu]_\star = i\theta^{\mu\nu}$

Kiertynyt Poincaré-algebra

- Normaali Poincaré-algebra:
  - Generaattorit: $P_\mu = i\partial_\mu$, $M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$
  - Kommutaatiorelaatiot:
    $[P_\mu, P_\nu] = 0$
    $[M_{\mu\nu}, P_\alpha] = -i(\eta_{\mu\alpha} P_\nu - \eta_{\nu\alpha} P_\mu)$
    $[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = -i(M_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} - M_{\mu\beta} M_{\nu\alpha} - M_{\nu\alpha} M_{\mu\beta} + M_{\nu\beta} M_{\mu\alpha})$
  - Esitysavaruuksien tulo: $m(f \otimes g) = f(x)g(x)$
  - Algebran kotulo: $\Delta(Y) = Y \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes Y$ (Leibnizin sääntö)
    $\Leftrightarrow (m \circ \Delta(Y))(f \otimes g) = (Y \circ m)(f \otimes g)$

Kiertynyt Poincaré-algebra

- Normaali Poincaré-algebra:
  - Generaattorit: $P_\mu = i\partial_\mu$, $M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$
  - Kommutaatiorelaatiot:
    $[P_\mu, P_\nu] = 0$
    $[M_{\mu\nu}, P_\alpha] = -i(\eta_{\mu\alpha} P_\nu - \eta_{\nu\alpha} P_\mu)$
    $[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = -i(M_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} - M_{\mu\beta} M_{\nu\alpha} - M_{\nu\alpha} M_{\mu\beta} + M_{\nu\beta} M_{\mu\alpha})$
  - Esitysavaruuksien tulo: $m(f \otimes g) = f(x)g(x)$
  - Algebran kotulo: $\Delta(Y) = Y \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes Y$ (Leibnizin sääntö)
    $\Leftrightarrow (m \circ \Delta(Y))(f \otimes g) = (Y \circ m)(f \otimes g)$
- Moyal-tulo: $m \mapsto m_\star = m \circ \mathcal{T}^{-1}$, $\mathcal{T} = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} P_\mu \otimes P_\nu}$, $P_\mu = i\partial_\mu$

Kiertynyt Poincaré-algebra

- Normaali Poincaré-algebra:
  - Generaattorit: $P_\mu = i\partial_\mu$, $M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$
  - Kommutaatiorelaatiot:
    $[P_\mu, P_\nu] = 0$
    $[M_{\mu\nu}, P_\alpha] = -i(\eta_{\mu\alpha} P_\nu - \eta_{\nu\alpha} P_\mu)$
    $[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = -i(M_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} - M_{\mu\beta} M_{\nu\alpha} - M_{\nu\alpha} M_{\mu\beta} + M_{\nu\beta} M_{\mu\alpha})$
  - Esitysavaruuksien tulo: $m(f \otimes g) = f(x)g(x)$
  - Algebran kotulo: $\Delta(Y) = Y \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes Y$ (Leibnizin sääntö)
    $\Leftrightarrow (m \circ \Delta(Y))(f \otimes g) = (Y \circ m)(f \otimes g)$
- Moyal-tulo: $m \mapsto m_\star = m \circ \mathcal{T}^{-1}$, $\mathcal{T} = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} P_\mu \otimes P_\nu}$, $P_\mu = i\partial_\mu$
- Kotuloa modifioitava: $\Delta \mapsto \Delta_t = \mathcal{T} \Delta \mathcal{T}^{-1}$:
  - $\Delta_t(P_\mu) = P_\mu \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes P_\mu$
  - $\Delta_t(M_{\mu\nu}) = M_{\mu\nu} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes M_{\mu\nu} -$
    $\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta} [(\eta_{\alpha\mu} P_\nu - \eta_{\alpha\nu} P_\mu) \otimes P_\beta + P_\alpha \otimes (\eta_{\beta\mu} P_\nu - \eta_{\beta\nu} P_\mu)]$

Kiertynyt Poincaré-algebra

- Normaali Poincaré-algebra:
  - Generaattorit: $P_\mu = i\partial_\mu$, $M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$
  - Kommutaatiorelaatiot:
    $[P_\mu, P_\nu] = 0$
    $[M_{\mu\nu}, P_\alpha] = -i(\eta_{\mu\alpha} P_\nu - \eta_{\nu\alpha} P_\mu)$
    $[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = -i(M_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} - M_{\mu\beta} M_{\nu\alpha} - M_{\nu\alpha} M_{\mu\beta} + M_{\nu\beta} M_{\mu\alpha})$
  - Esitysavaruuksien tulo: $m(f \otimes g) = f(x)g(x)$
  - Algebran kotulo: $\Delta(Y) = Y \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes Y$ (Leibnizin sääntö)
    $\Leftrightarrow (m \circ \Delta(Y))(f \otimes g) = (Y \circ m)(f \otimes g)$
- Moyal-tulo: $m \mapsto m_\star = m \circ \mathcal{T}^{-1}$, $\mathcal{T} = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} P_\mu \otimes P_\nu}$, $P_\mu = i\partial_\mu$
- Kotuloa modifioitava: $\Delta \mapsto \Delta_t = \mathcal{T} \Delta \mathcal{T}^{-1}$:
  - $\Delta_t(P_\mu) = P_\mu \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes P_\mu$
  - $\Delta_t(M_{\mu\nu}) = M_{\mu\nu} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes M_{\mu\nu} -$
    $\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta} [(\eta_{\alpha\mu} P_\nu - \eta_{\alpha\nu} P_\mu) \otimes P_\beta + P_\alpha \otimes (\eta_{\beta\mu} P_\nu - \eta_{\beta\nu} P_\mu)]$

  $\Rightarrow$ *Kiertynyt* Poincaré-algebra

Kiertynyt Poincaré-algebra

- Normaali Poincaré-algebra:
  - Generaattorit: $P_\mu = i\partial_\mu$, $M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$
  - Kommutaatiorelaatiot:
    $[P_\mu, P_\nu] = 0$
    $[M_{\mu\nu}, P_\alpha] = -i(\eta_{\mu\alpha}P_\nu - \eta_{\nu\alpha}P_\mu)$
    $[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = -i(M_{\mu\alpha}M_{\nu\beta} - M_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - M_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} + M_{\nu\beta}M_{\mu\alpha})$
  - Esitysavaruuksien tulo: $m(f \otimes g) = f(x)g(x)$
  - Algebran kotulo: $\Delta(Y) = Y \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes Y$ (Leibnizin sääntö)
    $\Leftrightarrow (m \circ \Delta(Y))(f \otimes g) = (Y \circ m)(f \otimes g)$
- Moyal-tulo: $m \mapsto m_\star = m \circ \mathcal{T}^{-1}$, $\mathcal{T} = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}P_\mu \otimes P_\nu}$, $P_\mu = i\partial_\mu$
- Kotuloa modifioitava: $\Delta \mapsto \Delta_t = \mathcal{T}\Delta\mathcal{T}^{-1}$:
  - $\Delta_t(P_\mu) = P_\mu \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes P_\mu$
  - $\Delta_t(M_{\mu\nu}) = M_{\mu\nu} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes M_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}\left[(\eta_{\alpha\mu}P_\nu - \eta_{\alpha\nu}P_\mu) \otimes P_\beta + P_\alpha \otimes (\eta_{\beta\mu}P_\nu - \eta_{\beta\nu}P_\mu)\right]$

  $\Rightarrow$ *Kiertynyt* Poincaré-algebra
- Algebran tulo säilyy. $\Rightarrow$
  - Kommutaatiorelaatiot säilyvät.
  - Poincaré-ryhmän esitykset säilyvät.

Epäkommutatiivinen skalaarikenttäteoria

- Saadaan siis kvanttikenttäteoria epäkommutatiivisessa aika-avaruudessa muotoilemalla teoria kommutatiivisessa aika-avaruudessa käyttäen Moyal-tuloa.

Epäkommutatiivinen skalaarikenttäteoria

- Saadaan siis kvanttikenttäteoria epäkommutatiivisessa aika-avaruudessa muotoilemalla teoria kommutatiivisessa aika-avaruudessa käyttäen Moyal-tuloa.
- Teorian symmetriaryhmä on kiertynyt Poincaré-ryhmä.

Epäkommutatiivinen skalaarikenttäteoria

- Saadaan siis kvanttikenttäteoria epäkommutatiivisessa aika-avaruudessa muotoilemalla teoria kommutatiivisessa aika-avaruudessa käyttäen Moyal-tuloa.
- Teorian symmetriaryhmä on kiertynyt Poincaré-ryhmä.

Esim: Epäkommutatiivinen skalaarikenttäteoria.

- Lagrangen tiheys:

$$\hat{\mathcal{L}}\Big[\hat{\mathcal{W}}[\phi]\Big] = \frac{1}{2}\Big[\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[\phi]\Big]^2 - \frac{m^2}{2}\hat{\mathcal{W}}[\phi]^2 - g\hat{\mathcal{W}}[\phi]^n$$

Epäkommutatiivinen skalaarikenttäteoria

- Saadaan siis kvanttikenttäteoria epäkommutatiivisessa aika-avaruudessa muotoilemalla teoria kommutatiivisessa aika-avaruudessa käyttäen Moyal-tuloa.
- Teorian symmetriaryhmä on kiertynyt Poincaré-ryhmä.

Esim: Epäkommutatiivinen skalaarikenttäteoria.

- Lagrangen tiheys:

$$\hat{\mathcal{L}}\Big[\hat{\mathcal{W}}[\phi]\Big] = \frac{1}{2}\Big[\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[\phi]\Big]^2 - \frac{m^2}{2}\hat{\mathcal{W}}[\phi]^2 - g\hat{\mathcal{W}}[\phi]^n$$

- Vaikutusintegraali:

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{Tr}\ \hat{\mathcal{L}}\Big[\hat{\mathcal{W}}[\phi]\Big] \\ &= \int d^D x \left[\tfrac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \tfrac{m^2}{2}\phi^2 - g\phi^{n_\star}\right] \end{aligned}$$

- Vuorovaikutustermi:

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\mathcal{W}}[\phi]^n = \prod_{a=1}^{n} \left(\int \frac{d^D k_a}{(2\pi)^D} \right) (2\pi)^D \delta^D \left(\sum_{a=1}^{n} k_a \right) V(k_a)$$

missä

$$V(k_a) = \prod_{a<b} e^{-\frac{i}{2} k_a \times k_b} \quad , \quad k_a \times k_b := k_{a\mu} \theta^{\mu\nu} k_{b\nu}$$

- Vuorovaikutustermi:

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\mathcal{W}}[\phi]^n = \prod_{a=1}^{n}\left(\int \frac{d^D k_a}{(2\pi)^D}\right)(2\pi)^D \delta^D\left(\sum_{a=1}^{n} k_a\right) V(k_a)$$

missä

$$V(k_a) = \prod_{a<b} e^{-\frac{i}{2}k_a \times k_b} \quad , \quad k_a \times k_b := k_{a\mu}\theta^{\mu\nu}k_{b\nu}$$

- Eroaa kommutatiivisesta teoriasta liikemääräavaruudessa ainoastaan tekijällä $V(k_a)$ vertekseissä.

- Vuorovaikutustermi:

$$\mathrm{Tr}\, \hat{\mathcal{W}}[\phi]^n = \prod_{a=1}^{n} \left(\int \frac{d^D k_a}{(2\pi)^D} \right) (2\pi)^D \delta^D \left(\sum_{a=1}^{n} k_a \right) V(k_a)$$

  missä

$$V(k_a) = \prod_{a<b} e^{-\frac{i}{2} k_a \times k_b} \quad , \quad k_a \times k_b := k_{a\mu} \theta^{\mu\nu} k_{b\nu}$$

- Eroaa kommutatiivisesta teoriasta liikemääräavaruudessa ainoastaan tekijällä $V(k_a)$ vertekseissä.
- Yksinkertainen analyysi paljastaa:
  - Tasossa oleville diagrammeille sisäisistä viivoista tulevat tekijät kumoavat toisensa.
    $\Rightarrow$ Ainoastaan $V(p_a)$ ulkoisista liikemääristä.

- Vuorovaikutustermi:

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\mathcal{W}}[\phi]^n = \prod_{a=1}^{n} \left(\int \frac{d^D k_a}{(2\pi)^D} \right) (2\pi)^D \delta^D \left(\sum_{a=1}^{n} k_a \right) V(k_a)$$

missä

$$V(k_a) = \prod_{a<b} e^{-\frac{i}{2} k_a \times k_b} \quad , \quad k_a \times k_b := k_{a\mu} \theta^{\mu\nu} k_{b\nu}$$

- Eroaa kommutatiivisesta teoriasta liikemääräavaruudessa ainoastaan tekijällä $V(k_a)$ vertekseissä.
- Yksinkertainen analyysi paljastaa:
  - Tasossa oleville diagrammeille sisäisistä viivoista tulevat tekijät kumoavat toisensa.
    $\Rightarrow$ Ainoastaan $V(p_a)$ ulkoisista liikemääristä.
  - Itsensä risteäville diagrammeille risteämiset antavat tekijän $e^{ik_{a\mu}\theta^{\mu\nu}k_{b\nu}}$.

- Vuorovaikutustermi:

$$\mathrm{Tr}\ \hat{\mathcal{W}}[\phi]^n = \prod_{a=1}^{n} \left(\int \frac{d^D k_a}{(2\pi)^D} \right) (2\pi)^D \delta^D \left(\sum_{a=1}^{n} k_a \right) V(k_a)$$

missä

$$V(k_a) = \prod_{a<b} e^{-\frac{i}{2} k_a \times k_b} \quad , \quad k_a \times k_b := k_{a\mu} \theta^{\mu\nu} k_{b\nu}$$

- Eroaa kommutatiivisesta teoriasta liikemääräavaruudessa ainoastaan tekijällä $V(k_a)$ vertekseissä.
- Yksinkertainen analyysi paljastaa:
  - Tasossa oleville diagrammeille sisäisistä viivoista tulevat tekijät kumoavat toisensa.
    $\Rightarrow$ Ainoastaan $V(p_a)$ ulkoisista liikemääristä.
  - Itsensä risteäville diagrammeille risteämiset antavat tekijän $e^{ik_{a\mu}\theta^{\mu\nu}k_{b\nu}}$.

$\Rightarrow$ Ylimääräinen tekijä yleisesti:

$$V(p_a) e^{-\frac{i}{2} C^{ab} k_a \times k_b}$$

missä p_a ulkoiset liikemäärät, k_a sisäiset liikemäärät, C^{ab} sisäisten viivojen risteämismatriisi.

Yksihiukkaspropagaattori

- $p \times p = 0 \Rightarrow$ Tasossa olevien diagrammien antamat termit samat kuin kommutatiivisessa teoriassa.
  $\Rightarrow$ Tasossa olevien silmukoiden divergenssit säilyvät entisellään.

Yksihiukkaspropagaattori

- $p \times p = 0 \Rightarrow$ Tasossa olevien diagrammien antamat termit samat kuin kommutatiivisessa teoriassa.
  $\Rightarrow$ Tasossa olevien silmukoiden divergenssit säilyvät entisellään.
- Yksi risteävä silmukka antaa extratekijän $e^{ik \times p}$. $\Rightarrow$

$$\Lambda_{eff}^2 = \frac{1}{1/\Lambda^2 + p \bullet p} \quad , \quad p \bullet q = -p_\mu (\theta^2)^{\mu\nu} q_\nu$$

Yksihiukkaspropagaattori

- $p \times p = 0 \Rightarrow$ Tasossa olevien diagrammien antamat termit samat kuin kommutatiivisessa teoriassa.
  $\Rightarrow$ Tasossa olevien silmukoiden divergenssit säilyvät entisellään.
- Yksi risteävä silmukka antaa extratekijän $e^{ik \times p}$. $\Rightarrow$

$$\Lambda_{eff}^2 = \frac{1}{1/\Lambda^2 + p \bullet p} \quad , \quad p \bullet q = -p_\mu (\theta^2)^{\mu\nu} q_\nu$$

TO BE CONTINUED…