UV/IR-sekoittuminen epäkommutatiivisessa kvanttikenttäteoriassa

Matti Raasakka

Helsingin yliopisto

Laudaturseminaari
17.3.2009

Postulaatti:

- Epäkommutatiivinen aika-avaruus: $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$, missä $|\theta^{\mu\nu}| \sim \lambda^2_{Planck}$

Postulaatti:

- Epäkommutatiivinen aika-avaruus: $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$, missä $|\theta^{\mu\nu}| \sim \lambda^2_{Planck}$
  $\Rightarrow$ Epätarkkuusperiaate ajan ja paikan mittauksille: $(\Delta x^\mu)(\Delta x^\nu) \gtrsim \lambda^2_{Planck}$, $\lambda_{Planck} \sim 10^{-35} m$

Postulaatti:

- Epäkommutatiivinen aika-avaruus: $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$, missä $|\theta^{\mu\nu}| \sim \lambda^2_{Planck}$
  $\Rightarrow$ Epätarkkuusperiaate ajan ja paikan mittauksille: $(\Delta x^\mu)(\Delta x^\nu) \gtrsim \lambda^2_{Planck}$, $\lambda_{Planck} \sim 10^{-35} m$
- Vastaava epäkommutatiivisuus voidaan johtaa esimerkiksi tietyn säieteorian matalaenergiarajalla, tai tarkastelemalla kvanttikenttäteoriaa dynaamisessa aika-avaruudessa.

Weylin vastaavuus:

- Muunnos kommutatiivisesta avaruudesta epäkommutatiiviseen ja päinvastoin:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}[f] &= \int d^D x\, f(x)\hat{\Delta}(x) \\ f(x) &= \mathrm{Tr}[\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\Delta}(x)] \end{aligned} \tag{1}$$

  missä

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{-ik_\mu x^\mu} \quad , \quad \mathrm{Tr}[\hat{\Delta}(x)] \equiv 1$$

  $\Rightarrow$ Saadaan vastaavuus $f(x) \leftrightarrow \hat{\mathcal{W}}[f]$.
- Esim. $\hat{\mathcal{W}}[x^\mu] = \hat{x}^\mu$, $\hat{\mathcal{W}}[e^{ik_\mu x^\mu}] = e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}$

Moyal-tulo:

- $\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g]$, missä

$$(f \star g)(x) = f(x) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial_\mu} \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial_\nu}} g(x)$$

  on ns. Moyal-tulo.

Moyal-tulo:

- $\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g]$, missä

$$(f \star g)(x) = f(x) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial_\mu} \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial_\nu}} g(x)$$

  on ns. Moyal-tulo.
- Saadaan epäkommutatiivisia koordinaatteja vastaava algebra kommutatiivisessa aika-avaruudessa muokkaamalla kenttien tuloa (algebraisomorfia).

Moyal-tulo:

- $\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g]$, missä

$$(f \star g)(x) = f(x) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial_\mu} \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial_\nu}} g(x)$$

  on ns. Moyal-tulo.
- Saadaan epäkommutatiivisia koordinaatteja vastaava algebra kommutatiivisessa aika-avaruudessa muokkaamalla kenttien tuloa (algebraisomorfia).
- Voidaan esittää myös muodossa

$$(f \star g)(x) = \iint d^D x_1 d^D x_2 f(x_1) g(x_2) K(x, x_1, x_2)$$

  missä

$$K(x, x_1, x_2) = \frac{1}{\det(\theta)} e^{2i(x-x_1)^\mu (\theta^{-1})_{\mu\nu} (x-x_2)^\mu}$$

- Epäkommutatiivinen lokaalius $\sim$ Kommutatiivinen epälokaalius

Epäkommutatiivinen $\lambda\phi^4$-skalaarikenttäteoria:

- Saadaan siis kenttäteoria epäkommutatiivisessa aika-avaruudessa muotoilemalla teoria kommutatiivisessa aika-avaruudessa käyttäen Moyal-tuloa.

Epäkommutatiivinen $\lambda\phi^4$-skalaarikenttäteoria:

- Saadaan siis kenttäteoria epäkommutatiivisessa aika-avaruudessa muotoilemalla teoria kommutatiivisessa aika-avaruudessa käyttäen Moyal-tuloa.
- Lagrangen tiheys:

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi) \star (\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi \star \phi - \frac{\lambda}{4!}\phi \star \phi \star \phi \star \phi$$

- Vaikutusintegraali:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi \star \phi \star \phi \star \phi\right]$$

- Ainoa ero kommutatiiviseen teoriaan extratekijät

$$V(k_a) = \prod_{a<b} e^{-\frac{i}{2} k_a \wedge k_b} \quad , \quad k_a \wedge k_b := k_{a\mu} \theta^{\mu\nu} k_{b\nu}$$

Feynmanin diagrammien vertekseissä.

- Ainoa ero kommutatiiviseen teoriaan extratekijät

$$V(k_a) = \prod_{a<b} e^{-\frac{i}{2} k_a \wedge k_b} \quad , \quad k_a \wedge k_b := k_{a\mu} \theta^{\mu\nu} k_{b\nu}$$

  Feynmanin diagrammien vertekseissä.
- Yksinkertainen analyysi paljastaa:
  - Tasossa oleville diagrammeille sisäisistä viivoista tulevat tekijät kumoavat toisensa.
    $\Rightarrow$ Ainoastaan $V(p_a)$ ulkoisista liikemääristä.

- Ainoa ero kommutatiiviseen teoriaan extratekijät

$$V(k_a) = \prod_{a<b} e^{-\frac{i}{2}k_a \wedge k_b} \quad , \quad k_a \wedge k_b := k_{a\mu}\theta^{\mu\nu}k_{b\nu}$$

  Feynmanin diagrammien vertekseissä.
- Yksinkertainen analyysi paljastaa:
  - Tasossa oleville diagrammeille sisäisistä viivoista tulevat tekijät kumoavat toisensa.
    $\Rightarrow$ Ainoastaan $V(p_a)$ ulkoisista liikemääristä.
  - Itsensä risteäville diagrammeille risteämiset antavat tekijän $e^{ik_a \wedge k_b}$.

- Ainoa ero kommutatiiviseen teoriaan extratekijät

$$V(k_a) = \prod_{a<b} e^{-\frac{i}{2} k_a \wedge k_b} \quad , \quad k_a \wedge k_b := k_{a\mu} \theta^{\mu\nu} k_{b\nu}$$

  Feynmanin diagrammien vertekseissä.
- Yksinkertainen analyysi paljastaa:
  - Tasossa oleville diagrammeille sisäisistä viivoista tulevat tekijät kumoavat toisensa.
    $\Rightarrow$ Ainoastaan $V(p_a)$ ulkoisista liikemääristä.
  - Itsensä risteäville diagrammeille risteämiset antavat tekijän $e^{ik_a \wedge k_b}$.

  $\Rightarrow$ Ylimääräinen tekijä yleisesti:

$$V(p_a) e^{-\frac{i}{2} C^{ab} k_a \wedge k_b}$$

  missä p_a ulkoiset liikemäärät, k_a kaikki liikemäärät, C^{ab} diagrammin viivojen risteämismatriisi.

Yksihiukkaspropagaattorin silmukkakorjaukset:

- $p \wedge p = 0 \Rightarrow$ Tasossa olevien diagrammien antamat termit samat kuin kommutatiivisessa teoriassa.
  $\Rightarrow$ Tasossa olevien silmukoiden divergenssit säilyvät entisellään.

Yksihiukkaspropagaattorin silmukkakorjaukset:

- $p \wedge p = 0 \Rightarrow$ Tasossa olevien diagrammien antamat termit samat kuin kommutatiivisessa teoriassa.
  $\Rightarrow$ Tasossa olevien silmukoiden divergenssit säilyvät entisellään.
- Yksi risteävä silmukka antaa extratekijän $e^{ik\wedge p}$.

$$\Rightarrow \Gamma^{(1)}_{\mathrm{1PI,np}} \sim \lambda \int \frac{d^4k}{k^2+m^2} e^{ik\wedge p}$$

Yksihiukkaspropagaattorin silmukkakorjaukset:

- $p \wedge p = 0 \Rightarrow$ Tasossa olevien diagrammien antamat termit samat kuin kommutatiivisessa teoriassa.
  $\Rightarrow$ Tasossa olevien silmukoiden divergenssit säilyvät entisellään.
- Yksi risteävä silmukka antaa extratekijän $e^{ik\wedge p}$.

$$\Rightarrow \Gamma^{(1)}_{\mathrm{1PI,np}} \sim \lambda \int \frac{d^4k}{k^2+m^2} e^{ik\wedge p}$$

- Regularisoimalla saadaan vaikutusintegraaliksi 1. kertaluvussa

$$S^{(1)}_{\mathrm{1PI}} = \int d^4p \quad \tfrac{1}{2}\Big[p^2 + M^2 + \tfrac{\lambda}{96\pi^2(p\circ p + 1/\Lambda^2)} - \tfrac{\lambda M^2}{96\pi^2} \ln\left(\tfrac{1}{M^2(p\circ p+1/\Lambda^2)}\right) + \mathcal{O}(\lambda^2)\Big]\tilde{\phi}(p)\tilde{\phi}(-p)$$

$$M^2 := m^2 + \tfrac{\lambda\Lambda^2}{48\pi^2} - \tfrac{\lambda m^2}{48\pi^2}\ln\left(\tfrac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^2),\; p\circ p := p_\mu(\theta^2)^{\mu\nu}p_\nu.$$

Yksihiukkaspropagaattorin silmukkakorjaukset:

- $p \wedge p = 0 \Rightarrow$ Tasossa olevien diagrammien antamat termit samat kuin kommutatiivisessa teoriassa.
  $\Rightarrow$ Tasossa olevien silmukoiden divergenssit säilyvät entisellään.
- Yksi risteävä silmukka antaa extratekijän $e^{ik\wedge p}$.

$$\Rightarrow \Gamma^{(1)}_{\mathrm{1PI,np}} \sim \lambda \int \frac{d^4 k}{k^2 + m^2} e^{ik\wedge p}$$

- Regularisoimalla saadaan vaikutusintegraaliksi 1. kertaluvussa

$$S^{(1)}_{\mathrm{1PI}} = \int d^4 p \quad \tfrac{1}{2}\Big[p^2 + M^2 + \tfrac{\lambda}{96\pi^2(p\circ p + 1/\Lambda^2)} - \tfrac{\lambda M^2}{96\pi^2} \ln\left(\tfrac{1}{M^2(p\circ p+1/\Lambda^2)}\right) + \mathcal{O}(\lambda^2)\Big] \tilde{\phi}(p)\tilde{\phi}(-p)$$

$$M^2 := m^2 + \tfrac{\lambda\Lambda^2}{48\pi^2} - \tfrac{\lambda m^2}{48\pi^2} \ln\left(\tfrac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^2),\ p\circ p := p_\mu (\theta^2)^{\mu\nu} p_\nu .$$

- Rajanotot $\lim_{\Lambda\to\infty}$ ja $\lim_{p\to 0}$ eivät kommutoi! Tämä on alkeellinen esimerkki *UV/IR-sekoittumisesta*.

Mistä moinen?

- Tasoaallot edelleen ortonormaaleja, eli eri liikemäärät riippumattomia toisistaan:

$$\langle k'|k\rangle = \int d^D x \; e^{-ik\cdot x} \star e^{ik'\cdot x} = (2\pi)^D \delta^D(k-k')$$

MUTTA . . .

Mistä moinen?

- Tasoaallot edelleen ortonormaaleja, eli eri liikemäärät riippumattomia toisistaan:

$$\langle k'|k\rangle = \int d^D x\; e^{-ik\cdot x} \star e^{ik'\cdot x} = (2\pi)^D \delta^D(k-k')$$

MUTTA ...

- Moyal-tulo aiheuttaa epälokaaleja efektejä. Olkoon kahdessa ulottuvuudessa $[x, y] = i\theta$

$$\Rightarrow \quad (\phi_1 \star \phi_2)(\bar{x}) = \frac{1}{\theta^2} \iint d^2\bar{x}_1 d^2\bar{x}_2 \phi_1(\bar{x}_1)\phi_2(\bar{x}_2) e^{2i(\bar{x}-\bar{x}_1)^i \theta^{-1}\epsilon_{ij}(\bar{x}-\bar{x}_2)^j}$$

- Jos ϕ_1 on nollasta eroava alueessa, jonka koko on Δ_{x1}, Δ_{y1}, niin integraali x_1:n yli on

$$\sim \quad \int dx_1 \phi_1(x_1, y_1) e^{ix_1(y_2 - y)/\theta}$$

joka häviää oskillaatioiden vuoksi, kun $\Delta_{x1}|y_2 - y|/\theta \gg 1$, vastaavasti y-koordinaatille. Siten $(\phi_1 \star \phi_2)(\bar{x})$ ‘mittaa’ ϕ_2:a tarkkuudella $\delta_{x2} \approx \theta/\Delta_{y1}$, $\delta_{y2} \approx \theta/\Delta_{x1}$.

- Jos ϕ_1 on nollasta eroava alueessa, jonka koko on Δ_{x1}, Δ_{y1}, niin integraali x_1:n yli on

$$\sim \quad \int dx_1 \phi_1(x_1, y_1) e^{ix_1(y_2-y)/\theta}$$

joka häviää oskillaatioiden vuoksi, kun $\Delta_{x1}|y_2 - y|/\theta \gg 1$, vastaavasti y-koordinaatille. Siten $(\phi_1 \star \phi_2)(\bar{x})$ 'mittaa' ϕ_2:a tarkkuudella $\delta_{x2} \approx \theta/\Delta_{y1}$, $\delta_{y2} \approx \theta/\Delta_{x1}$.

- Erityisesti, jos $\phi_1 = \phi_2 \equiv \phi$, niin $(\phi \star \phi)(\bar{x})$ on nollasta eroava alueessa

$$\delta_x \approx \max(\Delta_x, \frac{\theta}{\Delta_y}) \quad , \quad \delta_y \approx \max(\Delta_y, \frac{\theta}{\Delta_x})$$

- Jos ϕ_1 on nollasta eroava alueessa, jonka koko on Δ_{x1}, Δ_{y1}, niin integraali x_1:n yli on

$$\sim \quad \int dx_1 \phi_1(x_1, y_1) e^{ix_1(y_2 - y)/\theta}$$

joka häviää oskillaatioiden vuoksi, kun $\Delta_{x1}|y_2 - y|/\theta \gg 1$, vastaavasti y-koordinaatille. Siten $(\phi_1 \star \phi_2)(\bar{x})$ 'mittaa' ϕ_2:a tarkkuudella $\delta_{x2} \approx \theta/\Delta_{y1}$, $\delta_{y2} \approx \theta/\Delta_{x1}$.
- Erityisesti, jos $\phi_1 = \phi_2 \equiv \phi$, niin $(\phi \star \phi)(\bar{x})$ on nollasta eroava alueessa

$$\delta_x \approx \max(\Delta_x, \frac{\theta}{\Delta_y}) \quad , \quad \delta_y \approx \max(\Delta_y, \frac{\theta}{\Delta_x})$$

- Kentän vuorovaikuttaessa itsensä kanssa kapeat kokoa Δ olevat jakaumat leviävät kokoon $\delta \sim \theta/\Delta$, ja UV-taajuudet kontribuoivat IR-alueeseen. Siten kvanttikenttäteorian korkean energian virtuaalihiukkasilla merkittävä IR-vaikutus.

Havaittavia efektejä?

- Yleisesti ottaen NCQED:stä ja NCQCD:stä saatavat efektit antavat ylärajoja $\theta^{\mu\nu}$:lle, joista pienin $|\theta| \lesssim (10^{-15}\mathrm{GeV})^2$ QCD:stä Cs- ja Hg-atomikellojen mittaamien aikojen variaatiosta (Narison).

Havaittavia efektejä?

- Yleisesti ottaen NCQED:stä ja NCQCD:stä saatavat efektit antavat ylärajoja $\theta^{\mu\nu}$:lle, joista pienin $|\theta| \lesssim (10^{-15}\mathrm{GeV})^2$ QCD:stä Cs- ja Hg-atomikellojen mittaamien aikojen variaatiosta (Narison).
- Helling, You: Euklidisessa ja massattomassa λ-ϕ^4-teoriassa lisätermi $\sim 1/(p \circ p)$ vaikutusintegraalissa muuttaa kommutatiivisen teorian antaman $1/r$-potentiaalin eksponentiaalisesti heikkeneväksi, kun $\theta^{ij} = \theta\epsilon^{ij}$:

$$V(r) = 2\pi^2 \frac{\cos(r/\sqrt{2|\theta|})}{r} e^{-\frac{r}{\sqrt{2|\theta|}}}$$

joten epäkommutatiivisuudella voi olla radikaalejakin makroskooppisia seurauksia.

Havaittavia efektejä?

- Yleisesti ottaen NCQED:stä ja NCQCD:stä saatavat efektit antavat ylärajoja $\theta^{\mu\nu}$:lle, joista pienin $|\theta| \lesssim (10^{-15}\mathrm{GeV})^2$ QCD:stä Cs- ja Hg-atomikellojen mittaamien aikojen variaatiosta (Narison).
- Helling, You: Euklidisessa ja massattomassa λ-ϕ^4-teoriassa lisätermi $\sim 1/(p \circ p)$ vaikutusintegraalissa muuttaa kommutatiivisen teorian antaman $1/r$-potentiaalin eksponentiaalisesti heikkeneväksi, kun $\theta^{ij} = \theta\epsilon^{ij}$:

$$V(r) = 2\pi^2 \frac{\cos(r/\sqrt{2|\theta|})}{r} e^{-\frac{r}{\sqrt{2|\theta|}}}$$

  joten epäkommutatiivisuudella voi olla radikaalejakin makroskooppisia seurauksia.
- Vastaavaa analyysiä ei ole tehty epäkommutatiiviselle QED:lle, joten kysymys on avoin!

Lähteet:

- Szabo: Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces; [arXiv:hep-th/0109162v4].
- Minwalla, Raamsdonk, Seiberg: Noncommutative Perturbative Dynamics; [arXiv:hep-th/9912072v2].
- Helling, You: Macroscopic Screening of Coulomb Potentials From UV/IR-Mixing; [arXiv:hep-th/0707.1885v2].
- Seiberg, Witten: String Theory and Noncommutative Geometry; [arXiv:hep-th/9908142v3].
- Doplicher, Fredenhagen, Roberts: The Quantum Structure of Spacetime at the Planck Scale and Quantum Fields; [arXiv:hep-th/0303037v1].

Lähteet:

- Szabo: Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces; [arXiv:hep-th/0109162v4].
- Minwalla, Raamsdonk, Seiberg: Noncommutative Perturbative Dynamics; [arXiv:hep-th/9912072v2].
- Helling, You: Macroscopic Screening of Coulomb Potentials From UV/IR-Mixing; [arXiv:hep-th/0707.1885v2].
- Seiberg, Witten: String Theory and Noncommutative Geometry; [arXiv:hep-th/9908142v3].
- Doplicher, Fredenhagen, Roberts: The Quantum Structure of Spacetime at the Planck Scale and Quantum Fields; [arXiv:hep-th/0303037v1].

Kiitoksia ja näkemiin!