

Aaltoyhtälö mesoneille approksimaationa QCD:sta sekä sen Lorentz-kovarianssi

Jussi Eerola

jussi.eerola@helsinki.fi

*Teoreettisen fysiikan syventävien opintojen seminaari,
Helsingin yliopisto*

14.4.2009

- Sidotut tilat QFT:ssä periaatteessa tilanteeseen sopivan Greenin funktion napoja, reaali-osa vastaa energiaa (massaa) ja imaginääriosa "leveyttä" eli viime kädessä elinaikaa
- Ratkaiseminen integraaliyhtälöistä (Bethe-Salpeter) periaatteessa mahdollista perturbatiivisesti mutta työlästä - olisiko mahdollista löytää QCD:hen pohjautuva aaltoyhtälötyyppinen ratkaisumalli?
- Kyllä, tässä esityksessä eräs mahdollinen tapa

- Funktionaaliesitys 2-piste Greenin funktiosta tyyppiä

$$G(C, t_b - t_a) = \int \mathcal{D}(A) \mathcal{D}(\bar{\psi}, \psi) C^*(t_b) C(t_a) B(t = \pm\infty) \exp(i \int_{-\infty}^{\infty} dt dx \mathcal{L}), \quad (1)$$

missä B antaa reunaehdot ja C fermionikonfiguraatiot.

- Stationaarisen vaiheen approksimaatio - ekspansio "klassisen ratkaisun" ympäristössä periaatteessa samankaltaisesti kuin perinteisessä semiklassisessa approksimaatiossa polkuintegraaleille
- Erona mm. se, että eksakti rajalla $\alpha_s \rightarrow 0$ ei \hbar
- Saatava nollannen kertaluvun tulos vaatisi periaatteessa korjausten laskemista, ei kuitenkaan nyt
- Sama mahdollista tehdä baryoneille

Saadaan aaltoyhtälö [3]

$$-i\nabla \cdot [\alpha, \chi] + \frac{1}{2}\mathbf{k} \cdot \{\alpha, \chi\} + m_1\gamma^0\chi - m_2\chi\gamma^0 = (E - V)\chi, \quad (2)$$

missä $\alpha = \gamma^0\gamma$, $\chi = \chi(\mathbf{x}) = \chi_\mu\gamma^\mu$ on aaltofunktio kvarkeille niiden välisen etäisyyden funktiona ja *samalla aikakoordinaatilla kaikissa koordinaatistoissa*. Energiaspektri voidaan näyttää kuitenkin olevan Lorentz-invariantti [4]

$$E = \sqrt{M^2 + k^2},$$

tosin vain siinä tapauksessa, että potentiaali on lineaarinen, $V = c|\mathbf{x}|$, mikä tosin saadankin edellisen sivun johdosta (ainakin 1+1-ulotteinen tapaus [1], 3+1-ulotteisessa tapauksessa tulee myös pieni coulombinen termi [2]). Yllättävämpää on se, että yhtälölle löydetään eräänlainen Lorentz-tyyppinen kovarianssi, kuitenkin erilainen kuin varsinainen.

Rajoitutaan liikeakselille, eli $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ ja $\mathbf{x}_T = (x_1, x_2) = 0$, koska yhtälön (2) kautta ratkaisu voidaan implisiittisesti jatkaa muuallekin. Keskeistä on siirtyä käyttämään toista muuttujaa x_3 :n sijasta:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{2}(E - V)$$

eli

$$s(x_3) = \frac{1}{2} \int_0^{x_3} dx [E - V(x)] = \frac{1}{2} x_3 [E - \frac{1}{2} V(x_3)].$$

Huomautettakoon, että aaltoyhtälöä on tarkoitus soveltaa vain klassisella alueella, $E > V$ eli $|x| < \frac{E}{c}$, lisäksi edellä oletettu $x_3 > 0$, s on kasvava, kuten koordinaatille asiaan kuuluu. Tietysti s riippuu myös k :sta E :n k -riippuvuuden kautta.

Muodostetaan aluksi uusi "neli-liikemäärä":

$$p = (E - V, 0, 0, -k),$$

joten kuten nelivektoreiden neliö ainakin

$$p^2(s) \equiv (E - V)^2 - k^2 = M^2 - 4cs,$$

jossa ei enää ole eksplisiittistä k -riippuvuutta. Nyt p saadaan lepokoordinaatistosta Lorentz-boostaamalla x_3 -akselilla, kun puskuparametrille pätee

$$\tanh\xi = -\frac{k}{E - V}.$$

Kuitenkin nyt ξ on s :n eli x_3 :n funktio.

Merkitään lepokoordinaatiston ($k = 0$) aaltofunktiota $\tilde{\chi}(s)$ ja määritellään aaltofunktio ⁶ yleisellä k

$$\gamma^0 \chi(s) \equiv \exp(\alpha_3 \frac{\xi}{2}) \gamma^0 \tilde{\chi}(s) \exp(-\alpha_3 \frac{\xi}{2}) \exp[-\frac{i \Delta m^2 \xi}{2c}]. \quad (3)$$

Arvatenkin tässä $\Delta m^2 \equiv m_1^2 - m_2^2$ ja seuraava strategia on kääntää tästä esiin $\tilde{\chi}(s)$ ja sijoittaa yhtälöön (2) ehdolla $k = 0$, jolloin saadaan lopulta uusi aaltoyhtälö χ :lle

$$\frac{1}{2} p^2 \left\{ \alpha_3, \left[i \partial_s + \frac{\Delta m^2}{p^2} \frac{k}{E - V} \right] \gamma^0 \chi \right\} - i \sum_{j=1}^2 \{ \gamma^j p', \partial_j \gamma^0 \chi \} + m_1 p' \gamma^0 \chi - m_2 \gamma^0 \chi p' = p^2 \gamma^0 \chi, \quad (4)$$

mistä kovarianssi muunnoksessa (3) on helpompi nähdä. Tarkemmin ottaen siis kovarianssi (3):n kautta määrittyvissä boosteissa, missä

$$p \rightarrow p' = (E' - V, 0, 0, -k').$$

- Saatiin konstruointua aaltoyhtälö, jolle pätee Lorentz-tyyppinen kovarianssi
- Kuitenkin samanaikaisuuden vaatimus ($t_1 = t_2$) kaikissa koordinaatistoissa tekee puskuista paikkariippuvia
- Kovarianssi vaatii lineaarisen potentiaalin (ainakin tässä esitetyssä muodossa)
- Numeerinen ratkaisu, kun $x_T \neq 0$ antaa syyn olettaa, että myös liikettä vastaan kohtisuorissa suunnissa tapahtuu aaltofunktion kontraktoitumista[4]
- Tehty lasku alimman kertaluvun approksimaatio (valenssikvarkit) - fluktuaatiot (parinmuodostusefektit)?

Tämä esitys pohjautuu pitkälti seuraaviin artikkeleihin

Viitteet

- [1] Paul Hoyer "Gauge Covariant QCD Bound States" Phys. Lett. B 145(1984)127
- [2] Paul Hoyer "Mesons and Baryons from QCD" Phys. Lett. B 148(2007)199
- [3] Paul Hoyer "Equal-time Lorentz Covariance for Bound States" Phys. Lett. B 172(1986)101
- [4] Paul Hoyer HU preprint HU-TFT-85-49 (1985)