HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Kenttäteoriaa hilalla

Teoreettisen fysiikan syventävien opintojen seminaari, SL 2009

Tommi Markkanen

Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta

Kenttäteorian perusteita

- Mittainvarianssi äärimmäisen tärkeä
  - Vuorovaikutukset välittäjäbosonien vaihtona
- Standardimalli: Sähköheikkoteoria ja QCD
- Kaikki nykyiset kenttäteoriat sisältävät epätoivottuja äärettömyyksiä, jotka on poistettava (renormalisaatio)
- Renormalisaatiolla odottamattomia seurauksia
  - Varaus riippuu vuorovaikutuksen voimakkuudesta

Kenttäteorian perusteita

- QED ja QCD käyttäytyvät täysin päinvastaisesti
  - QCD:llä “asymptoottinen vapaus”
- Kenttäteorioille tunnetaan vain häiriöteoreettisia ratkaisuja
  - Kun kytkentävakio on suuri, ratkaisua ei tunneta
- Kvarkit eivät esiinny vapaina, miksi?
  - Hilaratkaisu Wilson (1974)
- Hilaformulaatiolle monia sovelluksia

Hilakenttäteorian peruskäsitteet

- Lähtökohtana diskretisoitu aika-avaruus
  - Useimmat tulokset helposti määritelmästä johdettavissa
- Kenttäteoriaa lähinnä polkuintegraaliformalismissa
  - Tarkistusmetodina jatkumoon siirtyminen
- Regularisaatio implisiittistä
- Usein epätoivottuja seurauksia
  - Symmetriarikko
  - Fermionimakujen tuplaantuminen
- Tarvitaan jatkumorajalla katoavia termejä

Laskuesimerkkinä skalaaripropagaattori

- Greenin funktiot polkuintegraalina

$$\langle 0|\hat{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\cdots)|0\rangle =$$

$$\frac{\int D\phi\,\phi(x)\phi(y)\cdots e^{-iS[\phi]}}{\int D\phi\, e^{-iS[\phi]}}$$

- Vaikutus Klein-Gordon yhtälöstä

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4x\,\phi(x)(\Box + M^2)\phi(x)$$

$$\equiv -\frac{1}{2}\int\int d^4x\,d^4y\,\phi_x (K)_{xy}\phi_y$$

- Generoiva funktionaali

$$\left[\frac{1}{i^n}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J[x_1]\cdots\delta J[x_n]}\right]_{J=0} =$$

$$\langle 0|\hat{T}(\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n))|0\rangle$$

- Voidaan kirjoittaa toisin

$$Z[J] = \int D\phi\, e^{-iS[\phi]+i\int d^4x[J(x)\phi(x)]} =$$

$$Z_0\exp\left[-\frac{1}{2}\int\int d^4x\,d^4y\,J_x(K)^{-1}_{xy}J_y\right]$$

Laskuesimerkkinä skalaaripropagaattori

- Saadaan tärkeä tulos

$$\langle 0|\hat{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y))|0\rangle = (K)^{-1}_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2 - M^2}$$

$$;\int d^4 t\,(K)^{-1}_{xt}(K)_{ty} = \delta(x-y)$$

- Hilalle siirryttäessä käytetään Euklidistä aika-avaruutta

$$x_0 \to -ix_4$$

- Muut muutokset jatkumotilanteeseen nähden ilmeisiä

Laskuesimerkkinä skalaaripropagaattori

- Diskreetti aika-avaruus

$$x_\mu \to n_\mu a \,,$$

$$\phi(x) \to \phi(na) \,,$$

$$\int d^4 x \to a^4 \sum_n \,,$$

$$D\phi \to \prod_n d\,\phi(na) \,,$$

$$\Box\,\phi(x) \to \frac{1}{a^2} \hat{\Box}\,\phi(na) \,,$$

- Generoivan funktionaalin muutos

$$Z_0 \exp\left[-\frac{i}{2}\int\int d^4 x\, d^4 y\, J_x (K)^{-1}_{xy} J_y\right]$$

$$\to Z_0 \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{n\,,\,m} J_n (K)^{-1}_{nm} J_m\right]$$

- Ratkaisu saadaan samoin kuin aiemmin

$$\sum_l (K)^{-1}_{nl} K_{lm} = \delta_{nm}$$

Laskuesimerkkinä skalaaripropagaattori

- Propagaattori hilalla

$$\langle 0|\hat{T}(\hat{\phi}_n \hat{\phi}_m)|0\rangle = (K)^{-1}_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\tilde{p}\cdot(n-m)}}{4\sum_{\mu=1}^{4} \sin^2(\frac{\tilde{p}_\mu}{2}) + M^2}$$

- Jatkumorajalla oikea tulos

$$\lim_{a\to 0} a^2 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{\frac{4}{a^2}\sum_{\mu=1}^{4} \sin^2(\frac{p_\mu a}{2}) + M^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{p^2 + M^2}$$

- Useimmiten asiat eivät onnistu yhtä helposti!

Ongelmia fermionien kanssa

- Edellisen kaltainen lasku antaa ongelmallisen tuloksen
  - Fermioneille saadaan jatkumorajalla useita eri propagaattoreita
- Ongelma on varsin syvällinen ja vaikea
- Ratkaistaan lisäämällä jatkumorajalla katoavia termejä
  - Mm. Wilsonin fermionit, “staggered” fermionit, kiraaliset fermionit jne.
- Lisätermit aihettavat symmetriarikkoja
  - “No-Go” theorem Nielsen & Ninomiya (1981)

Mittakentät hilalla

- Vuorovaikutus kenttäteoriaan saadaan, kun jonkin alkuperäisen teorian globaali symmetria vaaditaan lokaaliksi
  - Esim QED:ssa $\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu$
- Hilan tapauksessa pelkkä minimaalisubstituutio antaa väärän tuloksen (rikkoo symmetrian)
- Oikea tulos saadaan mittainvarinssin periaatteesta
- Hilaformulaatiolla joitakin odottamattomia ominaisuuksia

Mittakentät hilalla, esimerkki

- Elektromagneettinen kenttätensori jatkumossa

$$\int d^4x\, F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x), \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

- Sama hilalla

$$F_{\mu\nu}(n) = \frac{1}{a}[(A_\nu(n+\hat{e}_\mu) - A_\nu(n)) - (A_\mu(n+\hat{e}_\nu) - A_\mu(n))]$$

$$U_{\mu\nu}(n) = e^{iea^2 F_{\mu\nu}(n)}, \qquad \frac{1}{e^2}\sum_n \sum_{\mu<\nu} [1 - \frac{1}{2}(U_{\mu\nu}(n) + U^\dagger_{\mu\nu}(n))]$$

$$\approx \frac{1}{4}\sum_{n,\mu,\nu} a^4\, F_{\mu\nu}(n) F_{\mu\nu}(n)$$

- Mahdollistaa vahvan kytkennän ekspansion

Kvarkin ja antikvarkin välinen potentiaali

- QCD:n tärkein testi on selittää miksi kvarkit eivät esiinny vapaina
  - Ei onnistu jatkumossa perturbatiivisesti

- Laskun idea perustuu yksinkertaiseen kvanttimekaaniseen havaintoon

$$\langle x' | e^{-i\hat{H}t} | x \rangle \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \delta(x - x')\, e^{-iV(x)t}$$

- Kenttäteoreettinen tarkastelu antaa kuuluisan tuloksen
  - ”Wilsonin silmukka”

$$E(R) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \langle W_C[A] \rangle, \qquad W_C[A] = e^{ie\oint dz_\mu A_\mu(z)}$$

Kvarkin ja antikvarkin välinen potentiaali

- Ratkaisu Wilson (1974)
- Jättämällä dynaamiset fermionit huomiotta saadaan

$$\langle W_C[U] \rangle = \frac{\int DU\, D\bar{\psi}\, D\psi\, W_C[U]\, e^{-S_{QCD}[U,\psi,\bar{\psi}]}}{\int DU\, D\bar{\psi}\, D\psi\, e^{-S_{QCD}[U,\psi,\bar{\psi}]}}$$

$$\approx \frac{\int DU\, W_C[U]\, e^{-S[U]}}{\int DU\, e^{-S[U]}}$$

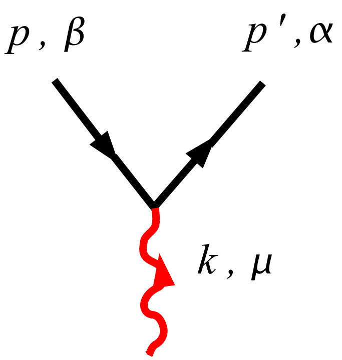
- Vahvan kytkennän ekspansio
  - Ensimmäisessä kertaluvussa QCD:lle $\hat{V}(\hat{R}) = \hat{\sigma}(g_0)\,\hat{R}$
  - Voidaan toki suorittaa muillekin teorioille

Heikon kytkennän ekspansio

- Vaikeampaa kuin jatkumossa
  - Enemmän graafeja
  - Divergenssin laskeminen ei toimi kuten ennen
- Mitä hyödytään?
  - Helpoin tapa tutkia symmetrioita
- Tarvitaan, jos halutaan ylipäätään osoittaa hilateorian vastaavuus jatkumotapaukseen

Heikon kytkennän ekspansio käytännössä

- Ekspansoidaan Lagrangen tiheys hilavakion avulla sarjaksi



- Saadaan päättymätön sarja termejä
  - Osa vastaa tuttua jatkumorajaa
  - Osa katoaa jatkumorajalla, mutta ei voida jättää huomiotta
    - Ovat olennaisia renormalisaatiolle
- Saadaan Feynmanin säännöt tutulla tavalla
  - Tulokset varsin rumia

$$-ie_0(2\pi)^4\,\delta_P^{(4)}(p-p'+k)\left\{(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\cos\left[\frac{(p+p')_\mu a}{2}\right]-ir\,\delta_{\alpha\beta}\sin\left[\frac{(p+p')_\mu a}{2}\right]\right\}$$

Supersymmetria ja kvanttigravitaatio

- Supersymmetriset kenttäteoriat vasta prototyyppiasteella
  - Yleensä joudutaan yksinkertaistamaan tilannetta
- Kvanttigravitaatiota ei ole vielä hilalla saatu onnistumaan
  - Ei sinänsä yllättävää, koska jatkumossakaan ei toimi
  - Vielä on silti mahdollisuus, että onnistuu sittenkin

Lähteet

- Heinz J. Rothe: Lattice Gauge Theories, an Introduction
- M. Creutz: Quarks, gluons and lattices
- Jan Smit: Introduction to Quantum Fields on a Lattice
- Erityiskiitokset Kari Rummukaiselle