

QCD:n numeerinen ratkaisu hilalla

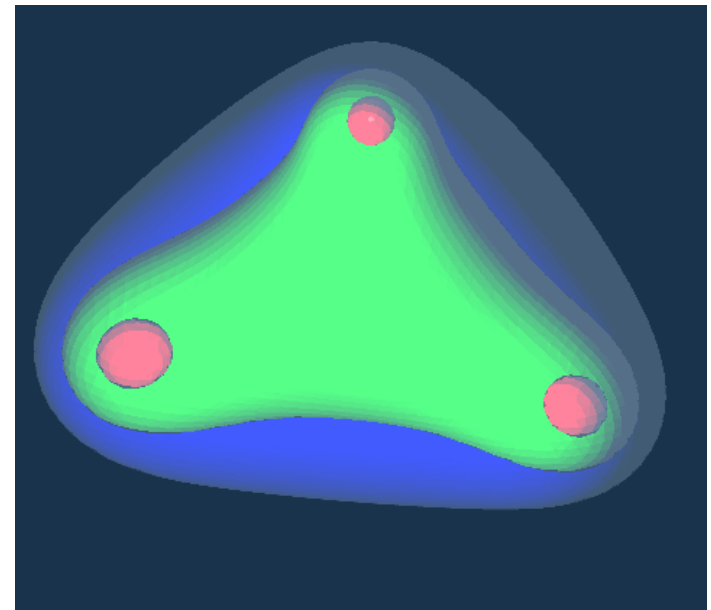
Teemu Rantalaiho

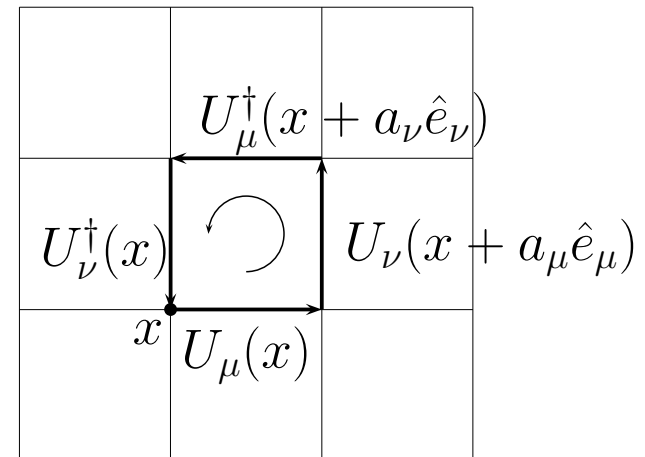
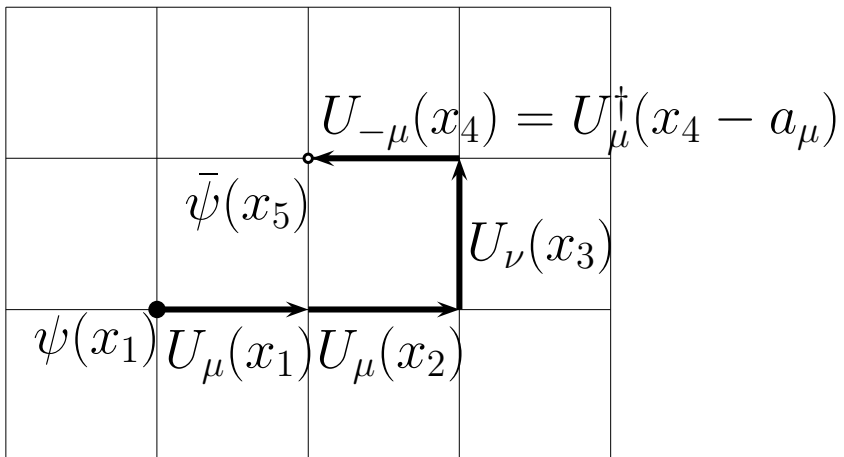
`teemu.rantalaiho@helsinki.fi`

*Teoreettisen fysiikan laudatur seminaari,
Helsingin yliopisto*

12. marraskuuta 2009

- Linkkivariaabeli ja plakettivaikutus
 - Yang-Mills vaikutus ja fermionit
- Hila-QCD:n statistiikkaa
 - Tärkeysotannat
 - Metropolis algoritmi
 - Pseudofermionit ja Hybridi Monte Carlo metodi
- Tulosten laskenta
 - Rajankäynti jatkumoon, skaalaus ja asymptottinen skaalaus
 - Staattinen potentiaali
 - Massalaskut
- Toteutus käyttäen CUDA-arkkitehtuuria
 - Mikä CUDA?
 - Tuloksia ja yhteenveto



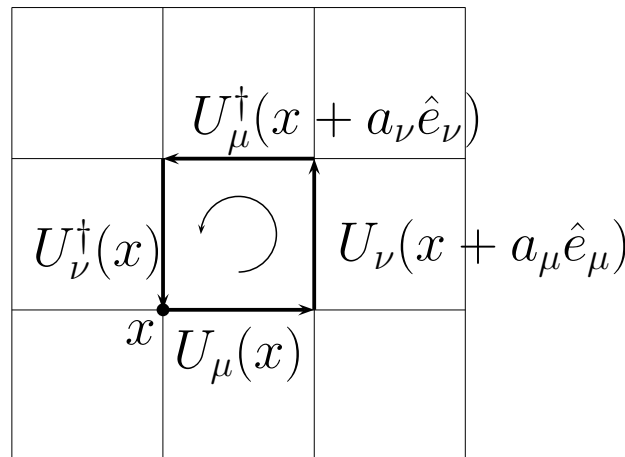


- Määritellään linkkivariaabeli $U_\mu(x)$ seuraavasti:

$$U_\mu(x) = \mathcal{P} \left\{ \exp \left(-i \int_x^{x+a_\mu} dx^\mu A_\mu(x) \right) \right\} \longrightarrow e^{-iA_\mu(x)a_\mu}, \text{ kun } a_\mu \longrightarrow 0$$

- Ja plakettivariaabeli:

$$P_{\mu\nu}(x) = U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a_\nu \hat{e}_\nu) U_\nu(x + a_\mu \hat{e}_\mu) U_\mu(x)$$



- Muunnosominaisuudet mittamuunnoksessa: $P'_{\mu\nu}(x) = \Lambda(x) P_{\mu\nu}(x) \Lambda^{-1}(x)$,
- Mikä tahansa suljettu “polku” linkkivariaabeleista mittainvariantti:

$$\text{tr} \left\{ \prod_{i=n}^1 U_{\mu_i}(x_i) \right\} = \text{tr} \left\{ U_{\mu_n}(x_n) \cdots U_{\mu_1}(x_1) \right\} = \text{tr} \left\{ \prod_{i=n}^1 U'_{\mu_i}(x_i) \right\}$$

- Plakettivariaabeli mittakentän funktiona:

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(x) &= \exp \left\{ -ia_\mu a_\nu (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i [A_\mu(x), A_\nu(x)]) + iO(a^3) \right\} \\ &= \exp \left\{ -ia_\mu a_\nu F_{\mu\nu}(x) + iO(a^3) \right\} \end{aligned}$$

- Sen jälki on

$$\text{tr } P_{\mu\nu}(x) = \text{tr } \hat{\mathbf{1}}_{N \times N} - \text{tr} \left\{ ia_\mu a_\nu F_{\mu\nu}(x) + O(a^3) \right\} - \frac{(a_\mu a_\nu)^2}{2} (\text{tr} \{ F_{\mu\nu}(x)^2 \}) + O(a^6)$$

- Termi $O(a^3)$ muotoa: $[A, [A, B]] - [B, [A, B]] + \dots$, joten sen jälki katoaa
- Vertaamalla tätä Yang-Mills Lagrangen tiheyteen $\frac{1}{2g^2} \text{tr} \{ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \}$ huomataan, että

$$\begin{aligned} \sum_{\mu, \nu=1}^4 \text{tr} \{ 1 - P_{\mu\nu}(x) \} &= \sum_{\mu < \nu=1}^4 \text{tr} \{ 2 - (P_{\mu\nu}(x) + P_{\mu\nu}^\dagger(x)) \} = \sum_{\mu < \nu=1}^4 2 \text{Re tr} \{ 1 - P_{\mu\nu}(x) \} \\ &= \sum_{\mu < \nu=1}^4 \frac{(a_\mu a_\nu)^2}{2} \text{tr} \{ F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \} + O(a^6), \end{aligned}$$

- Josta saadaan Yang-Mills vaikutus hilalla ($a_\mu = a_\nu$):

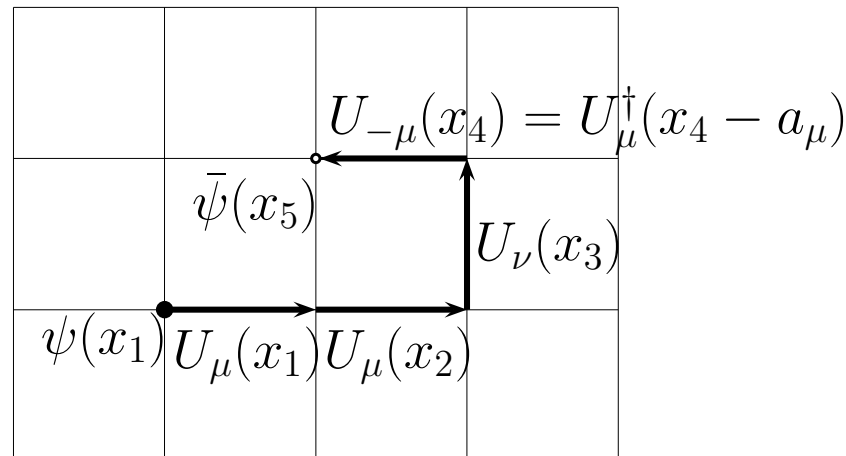
$$S_{\text{YM}}(U_\mu) = \frac{2}{g^2} \sum_{x \in L} \sum_{\mu < \nu=1}^4 \text{Re tr} \{ 1 - P_{\mu\nu}(x) \} \longrightarrow \frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{tr} \{ F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \}$$

- $\psi(x)$ muuntuu vektorina mittamuunnoksessa $\Lambda(x)$:

$$\psi'(x) = \Lambda(x)\psi(x) \quad \wedge \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}\Lambda^{-1}(x)$$

- Siten mikä tahansa avoin jatkuva ketju x_1 :stä x_n :än linkkivariaabeleita pitkin on triviaalisti mittainvariantti:

$$\bar{\psi}'(x_n)U'_{\mu_{n-1}}(x_{n-1}) \cdots U'_{\mu_1}(x_1)\psi'(x_1) = \bar{\psi}(x_n)U_{\mu_{n-1}}(x_{n-1}) \cdots U_{\mu_1}(x_1)\psi(x_1)$$



- Kovariantti derivaatta linkkivariaabeleiden avulla:

$$D_\mu \psi(x) = \lim_{dx^\mu \rightarrow 0} \frac{U^{-1}(x + dx^\mu) \psi(x + dx^\mu) - \psi(x)}{dx^\mu}$$

- Joten ensimmäinen yrite diskreetiksi fermioni-vaikutukseksi on

$$S_q = \sum_{x \in L'} \left(\bar{\psi}(x) m \psi(x) - \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} [\bar{\psi}(x + \hat{\mu}) \gamma^\mu U_\mu(x) \psi(x)] \right),$$

- S_q : aiheuttaa *fermionien tuplausongelman*
- Wilsonin ratkaisu: kovariantin derivaatan diskretisointiin lisätermejä \Rightarrow tuplatilojen massat saadaan kääntäen verrannollisiksi ' a' ':sta.

$$S_q^W = S_q + \sum_{x \in L} \sum_{\mu=1}^4 \frac{a_\mu r}{2} ((D_\mu \psi(x))^\dagger \gamma^0) (D_\mu \psi(x)),$$

– $r \neq 0$ – Wilsonin parametri – usein $r = 1$

- Wilsonin vaikutus dimesiottomien parametrien avulla:

$$S_q^W = \sum_{x \in L'} \left(\bar{\psi}(x) (m + 4r) \psi(x) - \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} [\bar{\psi}(x + \hat{\mu}) (\gamma^\mu + r) U_\mu(x) \psi(x)] \right)$$

- Hila-QCD:n vaikutus Euklidisessa avaruudessa:

$$S[\psi, \bar{\psi}, U] = \sum_{x \in L'} \bar{\psi}(x) (m + 4r) \psi(x) - \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} [\bar{\psi}(x + \hat{\mu}) (\gamma^\mu + r) U_\mu(x) \psi(x)] \\ + \frac{2}{g^2} \sum_{\mu < \nu = 1}^4 \text{Re tr} \{ 1 - P_{\mu\nu}(x) \}$$

- Mielivaltainen vakuumi-vakuumi odotusarvo polkuintegraalina:

$$\langle F[\psi, \bar{\psi}, U] \rangle = \frac{1}{Z} \int \left(\prod_{x \in L'} d\bar{\psi}(x) d\psi(x) \prod_{\mu=1}^4 dU_\mu(x) \right) F[\psi, \bar{\psi}, U] e^{-S[\psi, \bar{\psi}, U]},$$

- missä normitustekijä $Z = \int \prod_{x \in L'} d\bar{\psi}(x) d\psi(x) \prod_{\mu=1}^4 dU_\mu(x) e^{-S[\psi, \bar{\psi}, U]}$
- Vaikutus S alhaalta rajoitettu \Rightarrow ensemble-odotusarvo Boltzmannin painolla $e^{-S} \Rightarrow \Rightarrow$ kyseessä kanoninen jakauma! Statistista fysiikkaa!
- $d\bar{\psi}(x)$ ja $d\psi(x)$ Grassmann-muuttujia
- $dU_\mu(x)$:t ovat Haar-Hurewitzin, eli mitta-invariantteja, mittoja.

- Unohdetaan hetkeksi materiakentät
- Mittakentän integraalien suora laskeminen ei käytännössä onnistu
- Monte Carlo integroinnilla saataisiin ensemble *tasaisesti jakautuneita* kenttäkonfiguraatioita $\{U_i\}$:

$$\langle F[\psi, \bar{\psi}, U] \rangle \approx \frac{\sum_i F[U_i] e^{-S[U_i]}}{\sum_i e^{-S[U_i]}}$$

mutta suurimmalla osalla konfiguraatiosta paino $e^{-S} \ll 1$.

- Jos olisi mahdollista laskea ensemble $\{U_i\}$, joka toteuttaa Boltzmannin jakauman e^{-S} , niin integraalia voitaisiin approksimoida triviaalisti:

$$\langle F[\psi, \bar{\psi}, U] \rangle \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F[U_i]$$

ja tämän lisäksi laskentateho saataisiin käytettyä järkevästi.

- Tällainen otatanta tunnetaan nimellä *tärkeysotanta*

- Tärkeisotanta käytännössä usein Markovin ketjulla:
 - 1) Valitaan lähtökonfiguraatio U_0 satunnaisesti
 - 2) Luodaan uusi konfiguraatio U_i varioimalla satunnaisesti edellisestä konfiguraatiota U_{i-1} siten että $U_i = PU_{i-1}$
 - 3) Toistetaan kohtaa 2), kunnes approksimaatio on tarpeeksi tarkka
- Transitiotodennäköisyyden P pitää toteuttaa vahva ergoidisuusehto:

$$P(U' \leftarrow U) > 0, \forall U', U$$

- Ja tasapaino ensemblen $W_c = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n W_0, W_0 = \{U_0\}$ pitää toteuttaa tarkka tasapainoehto:

$$P(U' \leftarrow U)W_c = P(U \leftarrow U')W_c, \forall U', U$$

- Metropolis algoritmi:

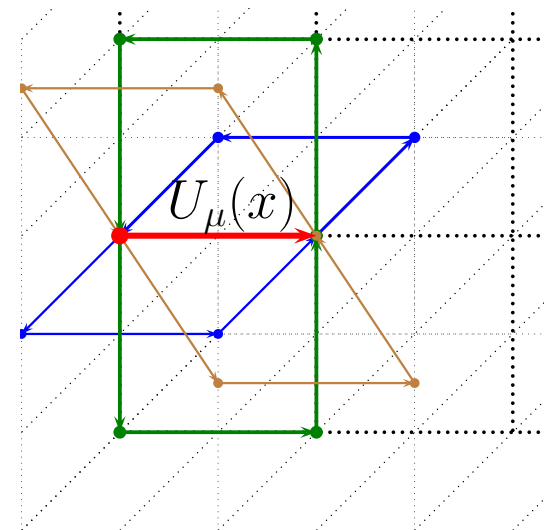
$$P(U' \leftarrow U) = \frac{1}{n} \min \left\{ 1, \frac{W_c[U']}{W_c[U]} \right\}$$

$$W_c[U] = e^{-S[U]}$$

- 1) Alusta N_m satunnaista $SU(3)$ -matriisia
- 2) Alusta hilan kaikki linkkivariaabelit $U_\mu(x)$ satunnaisesti
- 3) Jokaiselle linkkivariaabelille $U_\mu(x)$:
 - Luo uusi linkkivariaabeli kertomalla vanhaa satunnaismatriisilla
 - Laske Boltzmann-tekijän muutos $e^{-\Delta S}$, missä
$$\Delta S = S[U'] - S[U]$$
 - Valitse satunnaismuuttuja x tasaisesta jakaumasta $x \sim U(0, 1)$
 - Tallenna uusi linkkimuuttuja hilaan, jos $e^{-\Delta S} > x$

$$S[U] = \frac{\beta}{N_c} \sum_{x \in L'} \sum_{\mu < \nu = 1}^4 \text{Re tr} \{ 1 - P_{\mu\nu}(x) \}$$

$$\Delta S[U'_\mu(x)] = \frac{\beta}{N_c} \sum_{\nu \neq \nu=1}^4 \text{Re tr} \{ 1 - P_{\mu\nu}(x) \}$$



- Fermioni-integraalit Grassmann-muuttujia \Rightarrow Suora simulointi tietokoneella ei onnistu
- Fermionivaikutus voidaan kirjoittaa muodossa:

$$S_q = \sum_{x,y \in L'} \bar{\psi}(x) A_{x,y}[U] \psi(y),$$

- $F[\psi, \bar{\psi}, U] = \psi(x_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_1) \dots \bar{\psi}(y_n) F_U[U_\mu]$
- Grassmann-integraalit voi laskea analyyttisesti:

$$\left(\prod_{x \in L'} d\bar{\psi}(x) d\psi(x) \right) F[\psi, \bar{\psi}, U] e^{-S[\psi, \bar{\psi}, U]} = F_U[U] e^{-S_{YM}[U]} \det A[U] G(A[U]),$$

missä

$$G(A[U]) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_P \pi(P) A_{x_1 y_{p_1}}^{-1}[U] \dots A_{x_n y_{p_n}}^{-1}[U]$$

- Saadaan

$$\langle F[\psi, \bar{\psi}, U] \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{x \in L'} \prod_{\mu=1}^4 dU_\mu(x) F_U[U] e^{-S_{eff}[U]} G(A[U]),$$

$$S_{eff}[U] = S_{YM}[U] - \ln \det A[U] = S_{YM}[U] - \text{tr} \ln A[U]$$

- Dirac matriisi A iso – $\det A$ mahdoton laskea
- Lisäksi $\det A[U]$ on epälookaali \Rightarrow lämpökylpyalgoritmi hidas!
- Jos kaksi degeneraattia fermionimakua $A = QQ$:

$$\det(Q^\dagger Q) = N^{-1} \int d\phi^\dagger d\phi \exp \left\{ - \sum_{x,y} \phi^\dagger(x) [Q^\dagger Q]_{xy}^{-1} \phi(y) \right\},$$

- missä ϕ :t ovat skalaari-kenttiä!
- Determinantin lasku saadaan kääntämällä matriisi $[Q^\dagger Q]$
- Ongelma palautuu (yllättäen) muotoon:

$$Ax = b$$

- Jos Dirac matriisi A on positiivi-definiitti voidaan käyttää konjugaattigradienntti-algoritmia
 1. Alkuyrite x_0 (esimerkiksi $x_0 = b$)
 2. $r_0 = b - Ax_0$ mittaa yrittteen virhettä
 3. $p_0 = r_0$ askelsuunta
 4. Iteroidaan

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i$$

$$p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_{i+1} p_i,$$

missä

$$\alpha_i = \frac{r_i^\dagger r_i}{p_i^\dagger A p_i}, \quad \beta_i = \frac{r_i^\dagger r_i}{r_{i-1}^\dagger r_{i-1}}$$

- Fermionimatriisin kääntö kallis \Rightarrow Edullista päivittää koko hila per kääntö
- Periaatteessa mahdollista päivittää koko hila satunnaisesti ja sitten tehdä Metropolistesti, mutta Metropolistestin läpäisyn todennäköisyys olematon
- Molekylaaridynamiikka apuun:
 - Ajatellaan indeksi τ , ensemblessä $\{U_\tau\}$ aikaparametriksi
 - Määritellään linkkivariaabeleille $U_\mu(x)$ konjugaattimomentit:

$$\mathcal{P}_\mu(x) = \sum_{k=1}^{N^2-1} t_k \mathcal{P}_{\mu,k}(x)$$

- Sekä Hamiltonin funktio:

$$H[\mathcal{P}, \pi, U, \phi] = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu, k} \mathcal{P}_{\mu,k}(x)^2 + \frac{1}{2} \sum_x \pi^*(x) \pi(x) + S[U, \phi]$$

- Dynamiikka Markovin ketjun indexi-parametrin τ suhteen Hamiltonin liikeyhtälöistä:

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \wedge \quad \frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

- $\pi^*(x), \pi(x)$ ovat pseudofermionien $\phi^\dagger(x), \phi(x)$ momentit
- Wilsonin fermionimatriisi on muotoa

$$Q_{x,y} = \delta_{xy} - \kappa \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} \delta_{y+\hat{\mu},x} (r + \gamma_\mu) U_\mu(x)$$

- Linkkivariaabelin $U_\mu(x)$ “aikaderivaatta”:

$$\frac{dU_\mu(x)}{d\tau} = \partial_\tau e^{i\alpha_k(\tau)t_k} = \sum_k it_k \left(\frac{d\alpha_k(\tau)}{d\tau} \right) U_\mu(x)$$

- koska $\partial_\tau \alpha_k(\tau) = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}_{\mu,k}(x)} = \mathcal{P}_{\mu,k}(x)$ saadaan

$$\frac{dU_\mu(x)}{d\tau} = i \sum_k t_k \mathcal{P}_{\mu,k}(x) U_\mu(x) = i \mathcal{P}_\mu(x) U_\mu(x)$$

- Derivaatta linkkivariaabelin parametrin α_k suhteen on

$$\frac{\partial F[U]}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial F[e^{i\alpha_k t_k}]}{\partial \alpha_k} = it_k U \frac{\partial F(x)}{\partial x} \Big|_{x=U} \quad \wedge \quad \frac{\partial F[U^\dagger]}{\partial \alpha_k} = -it_k U^\dagger \frac{\partial F(x)}{\partial x} \Big|_{x=U^\dagger},$$

- linkkivariaabeleiden momenteille liikeyhtälöt:

$$\frac{d\mathcal{P}_{\mu,k}(x)}{d\tau} = -\frac{\partial S_{\text{YM}}[U]}{\partial \alpha_\mu(x)} - ([Q^\dagger Q]^{-1} \phi)^\dagger \frac{\partial(Q^\dagger Q)}{\partial \alpha_\mu(x)} ([Q^\dagger Q]^{-1} \phi),$$

– Pseudofermionivariaabeleiden liikeyhtälöt:

$$\frac{d\phi(x)}{d\tau} = \pi(x) \quad \wedge \quad \frac{d\pi(x)}{d\tau} = - \sum_y [Q^\dagger Q]_{x,y}^{-1} \phi(y)$$

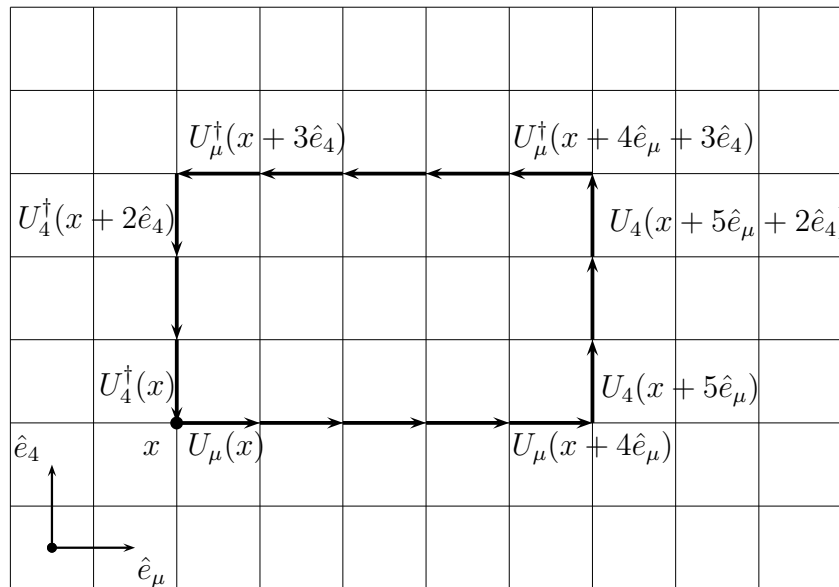
- Yksityiskohtainen tasapaino toteutuu “leapfrog”-integraatiolla:
 - 1) Integroidaan $\mathcal{P}_\mu(x)$ ja $\pi^*(x), \pi(x)$ puolikkaalla aika-askeleella $\frac{\Delta\tau}{2}$
 - 2) Integroidaan $U_\mu(x)$ ja $\phi^*(x), \phi(x)$ kokonaisella aika-askeleella $\Delta\tau$
 - 3) Integroidaan $\mathcal{P}_\mu(x)$ ja $\pi^*(x), \pi(x)$ kokonaisella aika-askeleella $\Delta\tau$
 - 4) Toistetaan 2):a ja 3):a kunnes tuotettu tarpeeksi konfiguraatioita ja integroidaan vielä kerran $U_\mu(x)$ ja $\phi^*(x), \phi(x)$ puolikkaalla aika-askeleella $\frac{\Delta\tau}{2}$
- Klassinen integrointi antaa (lähes) deterministisen trajektorin faasiavaruudessa \Rightarrow
 - Kehno ergoidisuus
 - “Potentiaalin” $S[U, \phi]$ minimi ei välttämättä löydy
 - Tasapaino jakauma oletettavasti jotain muuta kuin Boltzmannin jakauma e^{-S}
- Ajoittainen Metropolis-testi korjaa jakauman
- Momenttivariaabeleiden päivitys “lämpökylvystä” (gaussinen jakauma) parantaa ergoidisuutta
- Näin saatua algoritmia kutsutaan *Hybridi Monte Carlo*-algoritmiksi

- Aiemmin opittu että staattinen kvarkkipotentiaali voidaan laskea Wilsonin loopista:

$$tV(r) = -\ln\langle \text{tr } W_{r \times t} \rangle + C$$

- Missä Wilsonin looppi on:

$$W_{r \times t} = U_4^\dagger(x) U_4^\dagger(x + \hat{4}) \dots U_4^\dagger(x + (t-1)\hat{4}) U_\mu^\dagger(x + t\hat{4}) \dots U_\mu^\dagger(x + t\hat{4} + (r-1)\hat{\mu}) \\ U_4(x + (t-1)\hat{4} + r\hat{\mu}) \dots U_4(x + r\hat{\mu}) U_\mu(x + (r-1)\hat{\mu}) \dots U_\mu(x)$$



- Teoria ennustaa

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + C + \sigma r,$$

- Hadronien massojen lasku tärkeä sovellus
- Onnistuu tutkimalla aikakorrelaatiofunktioita suurella aika-parametrin arvoilla:

$$C(t) = \langle \Omega | \hat{T} \{ O(t) O(0) \} | \Omega \rangle,$$

- \hat{T} aikajärjestelyoperaattori ja $O(t) = e^{Ht} O(0) e^{-Ht}$ on operaattori, jolla on halutut kvanttinumero

esim. mesoneille sopii

$$O(t) = \sum_{x \in L} \Psi(x, t) \Gamma \bar{\Psi}(x, t),$$

missä Γ on jokin Dirac-matriiseista

- Korrelaattori $C(t), t > 0$ voidaan kirjoittaa energian ominaistilojen avulla:

$$\begin{aligned} C(t) &= \langle \Omega | e^{Ht} O(0) e^{-Ht} O(0) | \Omega \rangle = \sum_n \langle \Omega | e^{Ht} O(0) e^{-Ht} | E_n \rangle \langle E_n | O(0) | \Omega \rangle \\ &= \sum_n e^{-(E_n - E_0)t} |\langle E_n | O(0) | \Omega \rangle|^2 = \sum_n e^{-E_n t} a_n, \quad \text{kun } E_0 = 0 \end{aligned}$$

- Toisaalta hilalla periodiset reunaehdot:

$$C(-t) = \langle \Omega | O(0) O(-t) | \Omega \rangle = \sum_n a_n e^{-E_n t},$$

- joten

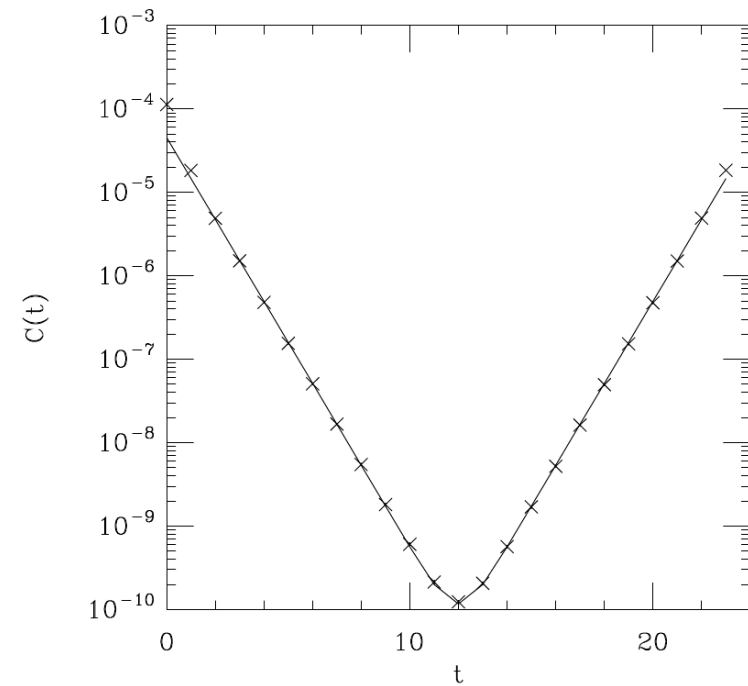
$$C(T - t) = C(-t) = \sum a_n e^{-E_n t} \quad \Leftrightarrow \quad C(t) = \sum_n a_n e^{-E_n(T-t)}$$

- Yhdistämällä tulokset saadaan koko hilan yli pätevä tulos:

$$C(t) = \sum_n a_n (e^{-E_n t} + e^{-E_n(T-t)}), \quad 0 \leq t \leq T$$

- $C(t)$ simulaatiosta – sovittamalla yllä oleva kehitemmä voidaan ratkoa a_n ja E_n

- Helpoissa tapauksissa $O(t)$ kytkeytyy vahvasti vakuumiin ja matalimman tason eksponentiaalinen muoto näkyy helposti suurella t :n arvoilla – vieressä tulos Thomas DeGrandin paperista [1]

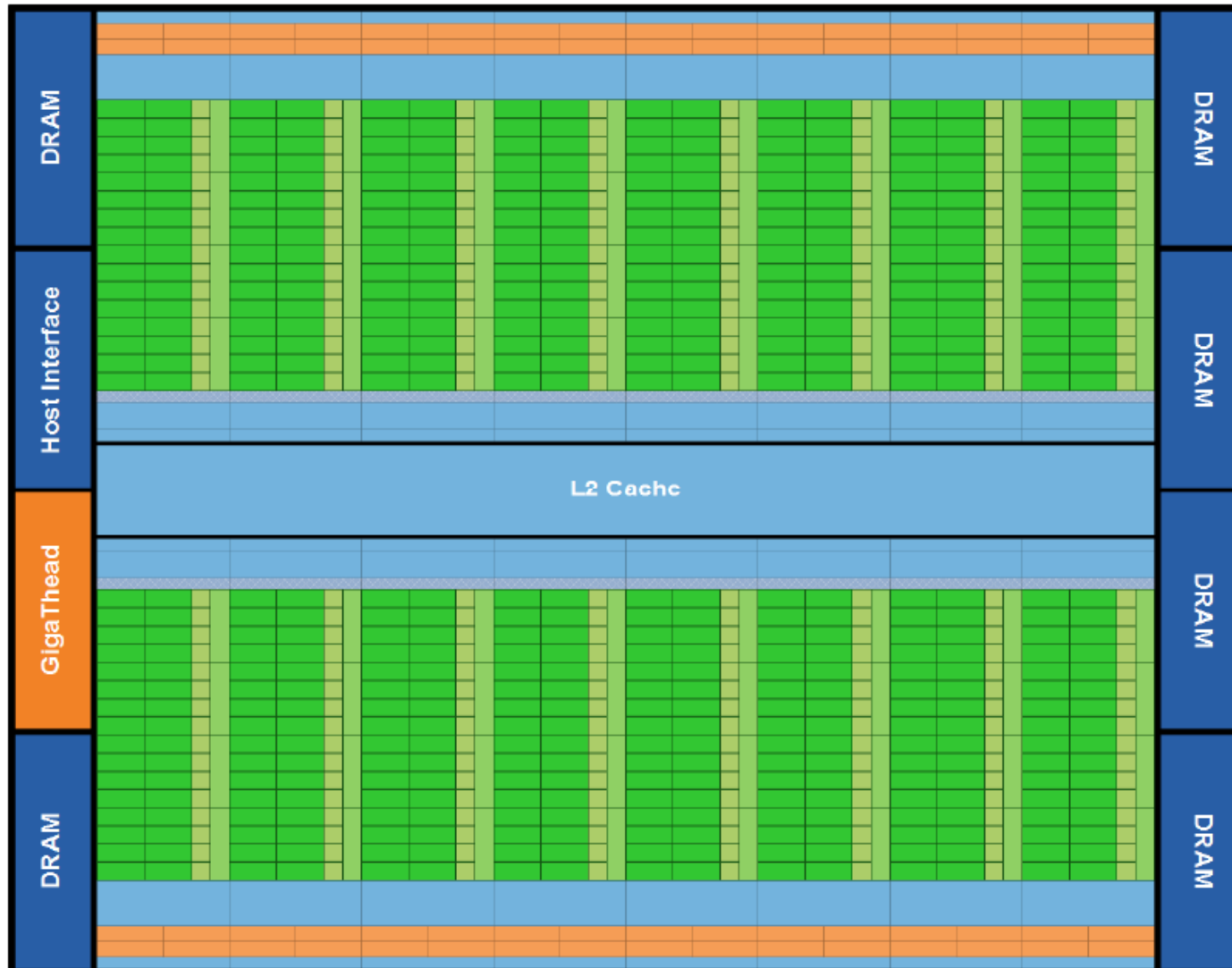


- Jatkumoraja saavutetaan kun $a \longrightarrow 0$ ja $V = a^4 N^4 \longrightarrow \infty$
- Järkevä rajakäyttäytyminen:
 - Fyysiset, mitattavat observaabelit vakioita lähestyttäessä rajaa
 \Rightarrow Paljaat parametrit g , kvarkkien massat vaativat säätöä
 - QCD:n kriittinen piste on $g_c = 0$ joten pitää varmistaa että $g \longrightarrow 0$ kun $a \longrightarrow 0$
- Simulaatio tuottaa dimensiottomia lukuja – hila-vakio 'a' tai skaala Λ_L voidaan määrätä sovittamalla yksi kokeellinen tulos simulaation ennusteeseen
- Λ_L Staattisen potentiaalin ratkaisusta [2]:

$$\Lambda_L = \frac{1}{a} (\beta_0 g^2)^{-\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta_0 g^2} \right\} [1 + O(g^2)]$$

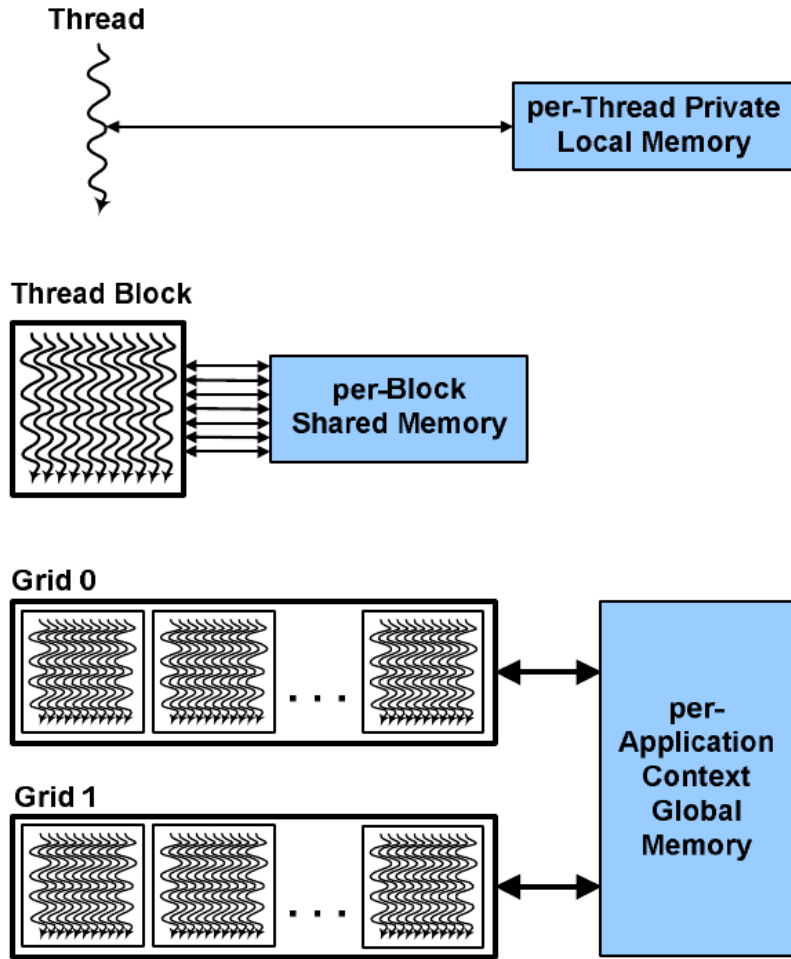
- Tämän avulla mikä tahansa massa on $m = c_m \Lambda_L$
- Toisaalta renormalisaatioyhtälö $\left\{ a \frac{\partial}{\partial a} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} m(a, g) = O(a^2 m^2)$ antaa antaa massojen m_1, m_2 suhteelle

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{c_1}{c_2} \left[1 + O(a^2 m^2) \right]$$

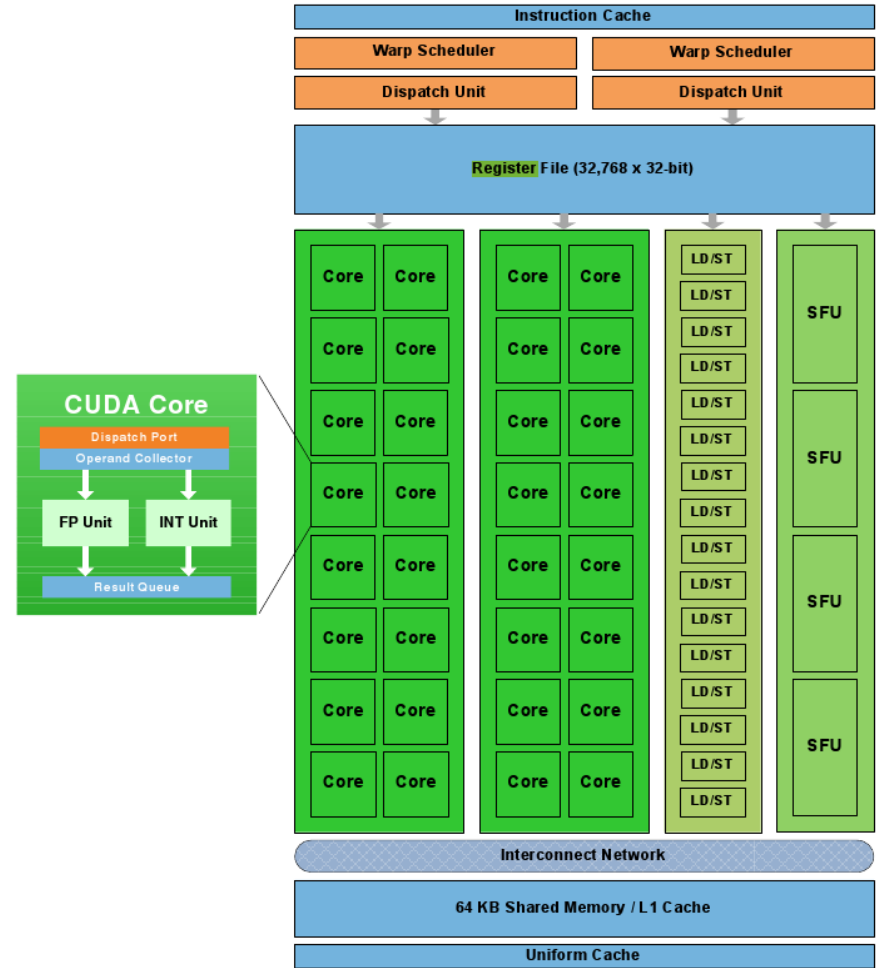


Fermi's 16 SM are positioned around a common L2 cache. Each SM is a vertical rectangular strip that contain an orange portion (scheduler and dispatch), a green portion (execution units), and light blue portions (register file and L1 cache).

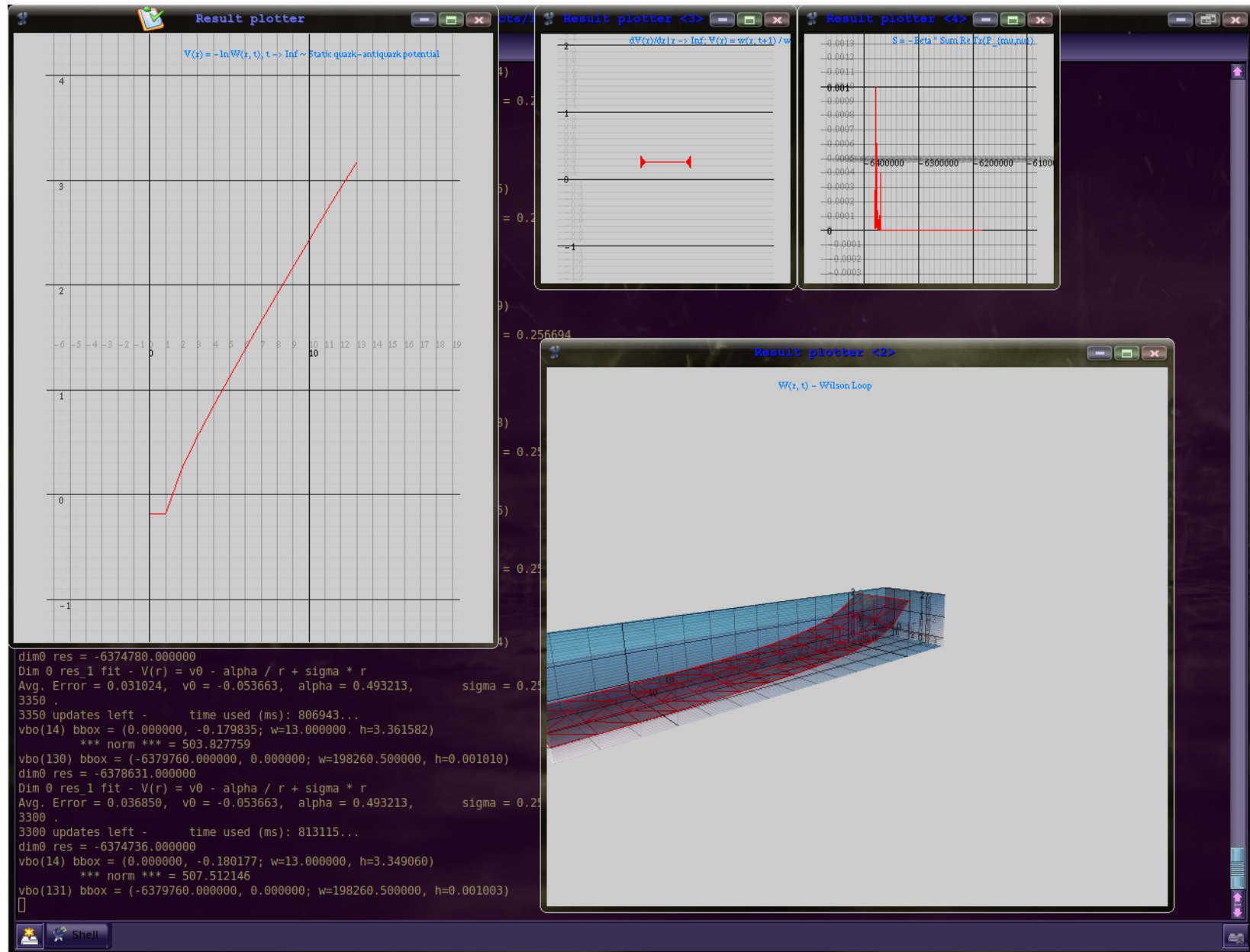
- Tulee sanoista “Compute Unified Device Architecture”
- NVIDIA Inc:n kehittämä ohjelmisto- ja mikroprosessoriarkkitehtuuri rinnakkaislaskentaan grafiikkasuorittimilla
- Moderni Grafiikkasuoritin sisältää hyvin monia suhteellisen yksinkertaisia ytimiä
- Laskenta nk. “SIMD”-periaatteella (“Same Instruction Multiple Data”)
- Erikoistumisesta hyötyjä:
 - Vähemmän välimuisteja \Rightarrow Enemmän transistoreja laskentaan
 - Käskykanta yksinkertaisempi
 - Mahdollistaa suurien datamäärien käytön (nykyään jo yli 100 Gigatavua/s)
 - Rinnakkaistuvissa ongelmissa nopeutus luokkaa 10x-500x
- Haittoja:
 - Kaikki ongelmat eivät rinnakkaistu
 - Datan siirto CPU:n ja GPU:n välillä verkkaista (PCI-Express x16 v2: 8Gb/s, v3: 16Gb/s)
 - Joidenkin asioiden rinnakkaistaminen edelleen vaivalloista



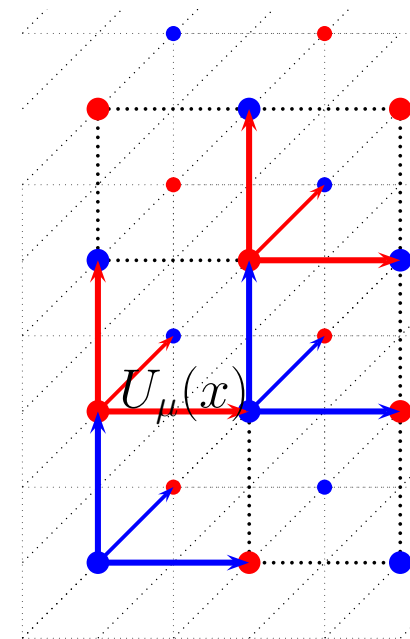
CUDA Hierarchy of threads, blocks, and grids, with corresponding per-thread private, per-block shared, and per-application global memory spaces.



Fermi Streaming Multiprocessor (SM)



- Tavoitteena helposti kehitettävä simulaattorirunko
- Toisaalta vaatimuksena tehokkuus
- Haasteita:
 - Ohjelmointiympäristön kankeus abstraktioon
 - Helppokäyttöisyys vs. tehokkuus
- Tällä hetkellä simulaattorirungon toimii korkealla tasolla seuraavasti:
 - Käyttäjäkoodi käännetään rungon kanssa omaksi simulaattorikseen
 - Rungon alustus: varaa muistista tilaa käyttäjän määrittelemille hila-kentille ja tuloksille jne.
 - Hilan alustus
 - Hilan päivitys ja ajoittainen välitulosten lasku:
 - * Jokaisen hilapisteen kaikki kentät päivitetään kerralla
 - * Käyttäjäkoodi voi lukea vierekkäisten hilapisteiden kenttiä ja tallentaa oman pisteensä kentän
 - * Tulosten laskenta vain joka n:n päivityksen välein, jolloin vältetään autokorrelaatio
 - Lopputulokset kirjoitetaan levyille

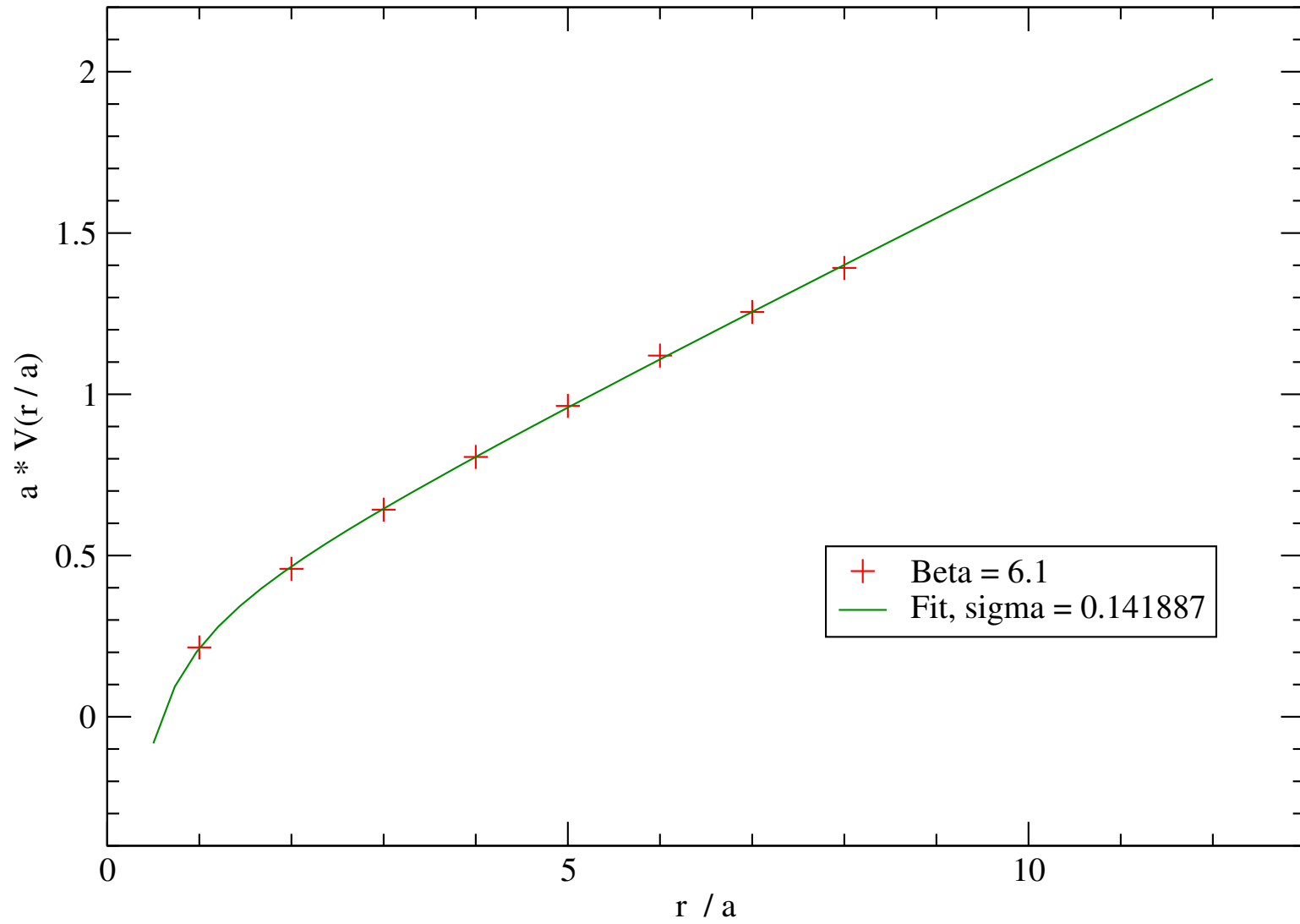


- Lopputuloksen hyviä ominaisuuksia:
 - Runko tukee hyvinkin erilaisia simulaatiovaatimuksia – esim. hilan dimensio, kentät yms. vapaasti valittavissa
 - Tarpeeksi helppokäyttöinen (kenttien luku ja kirjoittaminen yksinkertaista ja runko toteuttaa paljon apufunktioita)
 - Käyttäjäkoodi CUDA-C:tä – mahdollistaa mikro-optimointia
 - Suorituskyky mukava: Suorituskyky omalla GPU:lla n. 34x verrattuna CPU:un
 - * 16^4 -hilalla 10000 päivitystä: n.5-6 min vs 3tuntia
 - * Tuloslaskujen kanssa n. 20min vs 11 tuntia
- Ja huonoja:
 - Lisäominaisuuksien lisääminen itse runkoon vaivalloista
 - C:n esiprosessori on keuhno, mutta sitä tarvitaan paljon simulaattorin parametrissaatiassa
 - Suorituskykyä “jätetty pöydälle” ainakin n. 20% helppokäyttöisyyden takia
 - Tärkeitä ominaisuuksia tekemättä
 - Muistiluku vanhemmilla arkkitehtuureilla hidastaa simulaattoria

- Rungon sovelluksena yksinkertainen lämpökylpy-simulaatio “quenched”-approksimaatiossa
- Testiajoja 16^4 kokoisella hilalla
- Mitattiin staattinen potentiaali ja sen avulla “String tension” eli \sim säikeen jännitys betan arvolla $\beta = 6.1$
- Saatu “String tension”: $a^2\sigma = 0.141887$
- Tunnetusta tuloksesta $\sqrt{\sigma} = 440\text{MeV}$:
$$a = 1.6893 \times 10^{-16} \text{ m} = 0.16893\text{fm}.$$
- Hilan koko oli n. $(2.7\text{fm})^4$

Static Quark-Antiquark potential

Quenched Approximation - no Tadpole Improvement



- Hila-QCD:n linkkivariaabeli
 - Gluonivaikutukset suljettuina ketjuina
 - Massakentät avoimina
- Hila QCD statistisena systeeminä
- Lämpökylpy-algoritmi kätevä pelkälle $SU(N)$ mittakenttäteorialle
- Fermionit Grassmann-muuttujia
- Pseudofermionimenetelmä
- Hybridi Monte Carlo metodi
- Yhteys jatkumofysiikkaan
 - Skaalaus ennen asymptoottista skaalausta
 - Fyysiset variaabelit vakioita, paljaat muuttuvia
- Soveltuvuus rinnakkaislaskentaan – CUDA toteutus

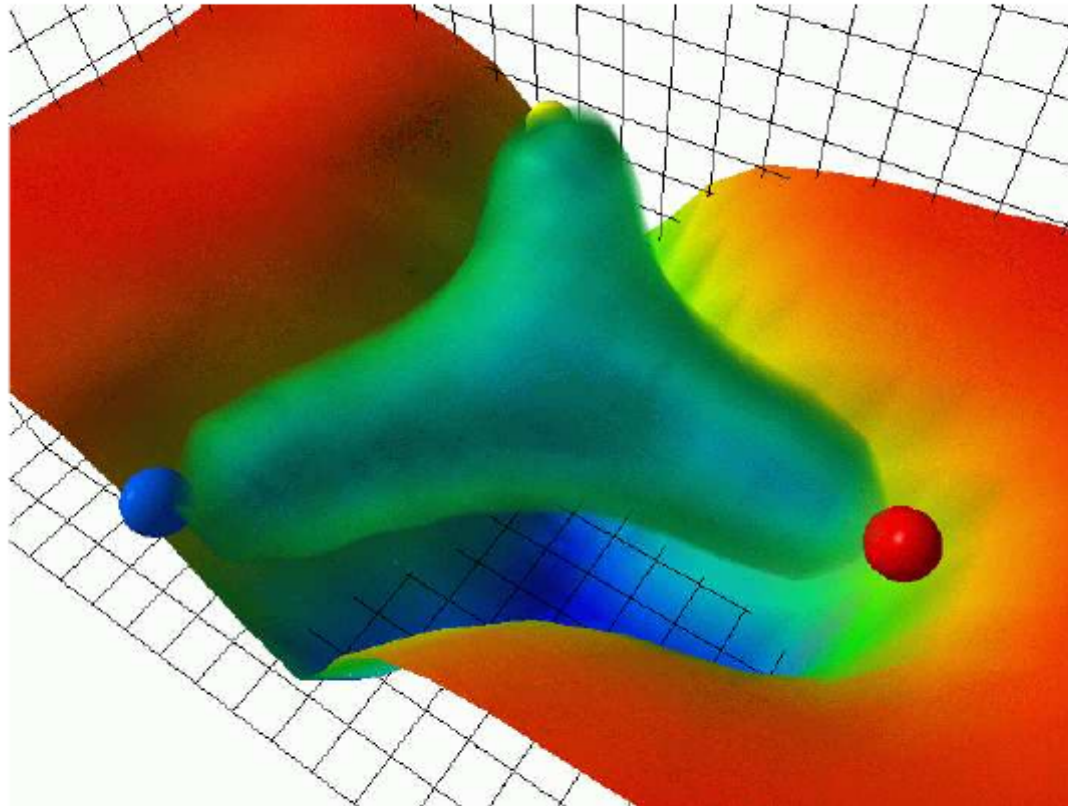


Figure 1: Bissey et. al – gluonkenttäjakauma baryonissa [3]

- [1] Thomas DeGrand – Lattice QCD and the CKM matrix,
[<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0008234>arXiv:hep-ph/0008234v1]
- [2] Jan Smit – Introduction to Quantum Fields on a Lattice:a robust mate, Cambridge University Press 2002, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, United Kingdom, Cambridge Lecture Notes in Physics
- [3] F. Bissey and F-G. Cao and A. Kitson and B. G. Lasscock and D. B. Leinweber and A. I. Signal and A. G. Williams and J. M. Zanotti – Gluon field distribution in baryons, 2005 [<http://arxiv.org/abs/hep-lat/0501004>arXiv:hep-lat/0501004v1]
- [4] Heinz J. Rothe – Lattice Gauge Theories: An Introduction, World Scientific Publishing Company 2005, Hackensack, N.J.
- [5] István Montvay and Gernot Münster – Quantum Fields on a Lattice, Cambridge University Press 1994, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, United Kingdom, Cambridge Monographs on Mathematical Physics