

Topologisten eristeiden ja suprajohteiden luokittelusta ja efektiivisistä kenttäteorioista

Jukka Väyrynen

Kylmälaboratorio, Aalto-yliopisto

Syventävien opintojen seminaari, Helsinki 16.12.2010

Historiallinen yleiskatsaus.

- Yleinen mielenkiinto: Magneetoelektrinen efekti, Majoranan fermioni, kvanttilaskenta, ym.

Historiallinen yleiskatsaus.

- Yleinen mielenkiinto: Magnetoelektrinen efekti, Majoranan fermioni, kvanttilaskenta, ym.
- QSHE, 2D: Kane & Mele (2005), Bernevig & Hughes & Zhang (2006), König et al (2007)
- Vahvat, 3D: Fu & Kane & Mele (2007), Roy (2009), Hsieh et al (2008), Xia et al (2009)

Historiallinen yleiskatsaus.

- Yleinen mielenkiinto: Magnetoelektrinen efekti, Majoranan fermioni, kvanttilaskenta, ym.
- QSHE, 2D: Kane & Mele (2005), Bernevig & Hughes & Zhang (2006), König et al (2007)
- Vahvat, 3D: Fu & Kane & Mele (2007), Roy (2009), Hsieh et al (2008), Xia et al (2009)
- Kenttäteoriaa: Qi & Hughes & Zhang (2008)



Historiallinen yleiskatsaus.

- Yleinen mielenkiinto: Magnetoelektrinen efekti, Majoranan fermioni, kvanttilaskenta, ym.
- QSHE, 2D: Kane & Mele (2005), Bernevig & Hughes & Zhang (2006), König et al (2007)
- Vahvat, 3D: Fu & Kane & Mele (2007), Roy (2009), Hsieh et al (2008), Xia et al (2009)
- Kenttäteoriaa: Qi & Hughes & Zhang (2008)
- Luokittelu: Schnyder & Ryu & Furusaki & Ludwig (2008)
Ryu & Schnyder & Furusaki & Ludwig (2010)

Sisältö.

- 1 Historiaa
- 2 Luokittelu
 - Symmetrioista
 - Projektorit
- 3 Efektiiviset kenttäteoriat, esimerkkejä
 - Chern-Simons-kenttäteoriat (1. ja 2.)
 - Dimensioireduktio
- 4 Pohdinta
- 5 Lähteet

Päälähteet.

-  Shinsei Ryu, Andreas P. Schnyder, Akira Furusaki, and Andreas W. W. Ludwig, *Topological insulators and superconductors: tenfold way and dimensional hierarchy*, New Journal of Physics **12**, 065010 (2010)
-  Xiao-Liang Qi, Taylor L. Hughes, and Shou-Cheng Zhang, *Topological field theory of time-reversal invariant insulators*, Phys. Rev. B **78**, 195424 (2008)

ZAZ-luokittelu.

- Topologia: gapitettu (aukollinen) H – montako eri faasia on? (Faasiraja \equiv gappi katoaa.)

ZAZ-luokittelu.

- Topologia: gapitettu (aukollinen) H – montako eri faasia on? (Faasiraja \equiv gappi katoaa.)
- H pysyy samassa faasissa vaikka häiritäisiin (epäpuhtaudet, deformaatiot ym.) kunhan gappi ei sulkeudu.

ZAZ-luokittelu.

- Topologia: gapitettu (aukollinen) H – montako eri faasia on? (Faasiraja \equiv gappi katoaa.)
- H pysyy samassa faasissa vaikka häiritäisiin (epäpuhtaudet, deformaatiot ym.) kunhan gappi ei sulkeudu.
- Yleistä perturboitua yksihiukkas- H :ta voidaan kuvata gapitetyllä satunnaismatriisilla.

ZAZ-luokittelu.

- Topologia: gapitettu (aukollinen) H – montako eri faasia on? (Faasiraja \equiv gappi katoaa.)
- H pysyy samassa faasissa vaikka häiritäisiin (epäpuhtaudet, deformaatiot ym.) kunhan gappi ei sulkeudu.
- Yleistä perturboitua yksihiukkas- H :ta voidaan kuvata gapitetyllä satunnaismatriisilla.
- Miten satunnaismatriisit voitaisiin luokitella? \Rightarrow Antiunitaariset symmetriaoperaatiot [2]:

ZAZ-luokittelu.

- Topologia: gapitettu (aukollinen) H – montako eri faasia on? (Faasiraja \equiv gappi katoaa.)
- H pysyy samassa faasissa vaikka häiritäisiin (epäpuhtaudet, deformaatiot ym.) kunhan gappi ei sulkeudu.
- Yleistä perturboitua yksihiukkas- H :ta voidaan kuvata gapitetyllä satunnaismatriisilla.
- Miten satunnaismatriisit voitaisiin luokitella? \Rightarrow Antiunitaariset symmetriaoperaatiot [2]:
 - Ajankääntö (TR): $U_T^\dagger \mathcal{H}^* U_T = \mathcal{H}$, $\mathcal{T} = U_T K$, $\mathcal{T}^2 = \pm 1$.

ZAZ-luokittelu.

- Topologia: gapitettu (aukollinen) \mathcal{H} – montako eri faasia on? (Faasiraja \equiv gappi katoaa.)
- \mathcal{H} pysyy samassa faasissa vaikka häirittäisiin (epäpuhtaudet, deformaatiot ym.) kunhan gappi ei sulkeudu.
- Yleistä perturboitua yksihiukkas- \mathcal{H} :ta voidaan kuvata gapitetyllä satunnaismatriisilla.
- Miten satunnaismatriisit voitaisiin luokitella? \Rightarrow Antiunitaariset symmetriaoperaatiot [2]:
 - Ajankääntö (TR): $U_T^\dagger \mathcal{H}^* U_T = \mathcal{H}$, $\mathcal{T} = U_T K$, $\mathcal{T}^2 = \pm 1$.
 - Varauskonjugaatio (PH): $U_C^\dagger \mathcal{H}^* U_C = -\mathcal{H}$, $\mathcal{C}^2 = \pm 1$.

ZAZ-luokittelu.

- Topologia: gapitettu (aukollinen) H – montako eri faasia on? (Faasiraja \equiv gappi katoaa.)
- H pysyy samassa faasissa vaikka häiritäisiin (epäpuhtaudet, deformaatiot ym.) kunhan gappi ei sulkeudu.
- Yleistä perturboitua yksihiukkas- H :ta voidaan kuvata gapitetyllä satunnaismatriisilla.
- Miten satunnaismatriisit voitaisiin luokitella? \Rightarrow Antiunitaariset symmetriaoperaatiot [2]:
 - Ajankääntö (TR): $U_T^\dagger \mathcal{H}^* U_T = \mathcal{H}$, $\mathcal{T} = U_T K$, $\mathcal{T}^2 = \pm 1$.
 - Varauskonjugaatio (PH): $U_C^\dagger \mathcal{H}^* U_C = -\mathcal{H}$, $\mathcal{C}^2 = \pm 1$.
 - Kiraalisuus (SL): $U_S^\dagger \mathcal{H} U_S = \mathcal{H}$. (Unitaarinen operaattori $[U_T U_C^*]$ joka antikommutoi H :n kanssa)

ZAZ-luokittelu.

- Topologia: gapitettu (aukollinen) H – montako eri faasia on? (Faasiraja \equiv gappi katoaa.)
- H pysyy samassa faasissa vaikka häirittäisiin (epäpuhtaudet, deformaatiot ym.) kunhan gappi ei sulkeudu.
- Yleistä perturboitua yksihiukkas- H :ta voidaan kuvata gapitetyllä satunnaismatriisilla.
- Miten satunnaismatriisit voitaisiin luokitella? \Rightarrow Antiunitaariset symmetriaoperaatiot [2]:
 - Ajankääntö (TR): $U_T^\dagger \mathcal{H}^* U_T = \mathcal{H}$, $\mathcal{T} = U_T K$, $\mathcal{T}^2 = \pm 1$.
 - Varauskonjugaatio (PH): $U_C^\dagger \mathcal{H}^* U_C = -\mathcal{H}$, $\mathcal{C}^2 = \pm 1$.
 - Kiraalisuus (SL): $U_S^\dagger \mathcal{H} U_S = \mathcal{H}$. (Unitaarinen operaattori $[U_T U_C^*]$ joka antikommutoi H :n kanssa)
- Kun H laitetaan hilalle, saadaan kymmenen luokkaa aikaevoluutio-operaattoreille.

ZAZ-luokittelu.

- Topologia: gapitettu (aukollinen) H – montako eri faasia on? (Faasiraja \equiv gappi katoaa.)
- H pysyy samassa faasissa vaikka häiritäisiin (epäpuhtaudet, deformaatiot ym.) kunhan gappi ei sulkeudu.
- Yleistä perturboitua yksihiukkas- H :ta voidaan kuvata gapitetyllä satunnaismatriisilla.
- Miten satunnaismatriisit voitaisiin luokitella? \Rightarrow Antiunitaariset symmetriaoperaatiot [2]:
 - Ajankääntö (TR): $U_T^\dagger \mathcal{H}^* U_T = \mathcal{H}$, $\mathcal{T} = U_T K$, $\mathcal{T}^2 = \pm 1$.
 - Varauskonjugaatio (PH): $U_C^\dagger \mathcal{H}^* U_C = -\mathcal{H}$, $\mathcal{C}^2 = \pm 1$.
 - Kiraalisuus (SL): $U_S^\dagger \mathcal{H} U_S = \mathcal{H}$. (Unitaarinen operaattori $[U_T U_C^*]$ joka antikommutoi H :n kanssa)
- Kun H laitetaan hilalle, saadaan kymmenen luokkaa aikaevoluutio-operaattoreille.
- Me haluamme kuitenkin tutkia ja luokitella *projektoreita*.

Projektorit.

Tutkitaan translaatioinvariantteja systeemejä. Määritellään unitaarinen (!) "flat band"-Hamiltoniaani, eli projektori,

$$Q_k = \sum_{\alpha \in \text{empty}} |u_\alpha(k)\rangle \langle u_\alpha(k)| - \sum_{\alpha \in \text{occ}} |u_\alpha(k)\rangle \langle u_\alpha(k)| \sim \mathcal{H}_k$$

Projektorit.

Tutkitaan translaatioinvariantteja systeemejä. Määritellään unitaarinen (!) "flat band"-Hamiltoniaani, eli projektori,

$$Q_k = \sum_{\alpha \in \text{empty}} |u_\alpha(k)\rangle \langle u_\alpha(k)| - \sum_{\alpha \in \text{occ}} |u_\alpha(k)\rangle \langle u_\alpha(k)| \sim \mathcal{H}_k$$

- Myös Q_k -matriisit kattavat symmetriset avaruudet (5. sarake).

Nimi	TR	PH	SL	Classifying space	π_0	π_1	π_2	π_3
A	0	0	0	$\frac{U(N+M)}{U(N) \times U(M)}$	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}	-
AI	+1	0	0	$\frac{O(N+M)}{O(N) \times O(M)}$	\mathbb{Z}	-	-	-
AII	-1	0	0	$\frac{Sp(N+M)}{Sp(N) \times Sp(M)}$	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
AIII	0	0	1	$U(N)$	-	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}
BDI	+1	+1	1	$O(2N)$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	-	-
CII	-1	-1	1	$Sp(2N)$	-	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}_2
D	0	+1	0	$O(2N)/U(N)$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	-
C	0	-1	0	$Sp(2N)/U(N)$	-	-	\mathbb{Z}	-
DIII	-1	+1	1	$U(2N)/Sp(2N)$	-	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}
CI	+1	-1	1	$U(N)/O(N)$	-	-	-	\mathbb{Z}

Projektorit.

Tutkitaan translaatioinvariantteja systeemejä. Määritellään unitaarinen (!) "flat band"-Hamiltoniaani, eli projektori,

$$Q_{\mathbf{k}} = \sum_{\alpha \in \text{empty}} |u_{\alpha}(\mathbf{k})\rangle \langle u_{\alpha}(\mathbf{k})| - \sum_{\alpha \in \text{occ}} |u_{\alpha}(\mathbf{k})\rangle \langle u_{\alpha}(\mathbf{k})| \sim \mathcal{H}_{\mathbf{k}}$$

- Myös $Q_{\mathbf{k}}$ -matriisit kattavat symmetriset avaruudet (5. sarake).
- Kuvaukset $Q : \text{BZ} \rightarrow \text{Classifying space}$, $\mathbf{k} \mapsto Q_{\mathbf{k}}$, voidaan luokitella homotopiaryhmien (π_d) avulla.

Nimi	TR	PH	SL	Classifying space	π_0	π_1	π_2	π_3
A	0	0	0	$\frac{U(N+M)}{U(N) \times U(M)}$	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}	-
AI	+1	0	0	$\frac{O(N+M)}{O(N) \times O(M)}$	\mathbb{Z}	-	-	-
AII	-1	0	0	$\frac{Sp(N+M)}{Sp(N) \times Sp(M)}$	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
AIII	0	0	1	$U(N)$	-	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}
BDI	+1	+1	1	$O(2N)$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	-	-
CII	-1	-1	1	$Sp(2N)$	-	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}_2
D	0	+1	0	$O(2N)/U(N)$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	-
C	0	-1	0	$Sp(2N)/U(N)$	-	-	\mathbb{Z}	-
DIII	-1	+1	1	$U(2N)/Sp(2N)$	-	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}
CI	+1	-1	1	$U(N)/O(N)$	-	-	-	\mathbb{Z}

Projektorit.

Tutkitaan translaatioinvariantteja systeemejä. Määritellään unitaarinen (!) "flat band"-Hamiltoniaani, eli projektori,

$$Q_{\mathbf{k}} = \sum_{\alpha \in \text{empty}} |u_{\alpha}(\mathbf{k})\rangle \langle u_{\alpha}(\mathbf{k})| - \sum_{\alpha \in \text{occ}} |u_{\alpha}(\mathbf{k})\rangle \langle u_{\alpha}(\mathbf{k})| \sim \mathcal{H}_{\mathbf{k}}$$

- Myös $Q_{\mathbf{k}}$ -matriisit kattavat symmetriset avaruudet (5. sarake).
- Kuvaukset $Q : \text{BZ} \rightarrow \text{Classifying space}$, $\mathbf{k} \mapsto Q_{\mathbf{k}}$, voidaan luokitella homotopiaryhmien (π_d) avulla.
- Invariantit: kiraalisymmetriset – kierrosluku, muilla CS-muoto (tai sen integraaliekspontiaali)

Nimi	TR	PH	SL	Classifying space	π_0	π_1	π_2	π_3
A	0	0	0	$\frac{U(N+M)}{U(N) \times U(M)}$	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}	-
AI	+1	0	0	$\frac{O(N+M)}{O(N) \times O(M)}$	\mathbb{Z}	-	-	-
AII	-1	0	0	$\frac{Sp(N+M)}{Sp(N) \times Sp(M)}$	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
AIII	0	0	1	$U(N)$	-	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}
BDI	+1	+1	1	$O(2N)$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	-	-
CII	-1	-1	1	$Sp(2N)$	-	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}_2
D	0	+1	0	$O(2N)/U(N)$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	-
C	0	-1	0	$Sp(2N)/U(N)$	-	-	\mathbb{Z}	-
DIII	-1	+1	1	$U(2N)/Sp(2N)$	-	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}
CI	+1	-1	1	$U(N)/O(N)$	-	-	-	\mathbb{Z}

$(2+1)D$ CS.

Esimerkki: IQHE, luokka A $(2 + 1)D$:ssä

- Topologinen invariantti on johtavuus $\sigma_{xy} = Ne^2/h$.

(2+1)D CS.

Esimerkki: IQHE, luokka A (2 + 1)D:ssä

- Topologinen invariantti on johtavuus $\sigma_{xy} = Ne^2/h$.
- Liikemäärävaruuden Berryn konnektio
 $\mathcal{A}^{ab} = \langle u_a | \partial_{k_\alpha} | u_b \rangle dk_\alpha$, $a = 1, \dots, N$, $\alpha = 1, 2$ ja (**mitta**-)kentänvoimakkuus
 $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ määräävät 1. Chernin luvun:

$$\begin{aligned} \text{Ch}_1[\mathcal{F}] \equiv C_1 &= \frac{i}{2\pi} \int_{\text{BZ}} \text{tr} \mathcal{F} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int dk_x dk_y \sum_{a \in \text{occ}} \left[\partial_{k_x} \langle u_a | \partial_{k_y} | u_a \rangle - \partial_{k_y} \langle u_a | \partial_{k_x} | u_a \rangle \right]. \end{aligned}$$

TKNN [4]: $C_1 = \frac{\sigma_{xy}}{e^2/h}$.

(2+1)D CS.

Esimerkki: IQHE, luokka A (2 + 1)D:ssä

- Topologinen invariantti on johtavuus $\sigma_{xy} = Ne^2/h$.
- Liikemäärävaruuden Berryn konnektio
 $\mathcal{A}^{ab} = \langle u_a | \partial_{k_\alpha} | u_b \rangle dk_\alpha$, $a = 1, \dots, N$, $\alpha = 1, 2$ ja (**mitta**-)kentänvoimakkuus
 $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ määräävät 1. Chernin luvun:

$$\begin{aligned} \text{Ch}_1[\mathcal{F}] &\equiv C_1 = \frac{i}{2\pi} \int_{\text{BZ}} \text{tr} \mathcal{F} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int dk_x dk_y \sum_{a \in \text{occ}} \left[\partial_{k_x} \langle u_a | \partial_{k_y} | u_a \rangle - \partial_{k_y} \langle u_a | \partial_{k_x} | u_a \rangle \right]. \end{aligned}$$

TKNN [4]: $C_1 = \frac{\sigma_{xy}}{e^2/h}$.

- Toisaalta, $j^\mu = \frac{c_1}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho$, joka saadaan efektiivisestä CS-kenttäteoriasta
 $S_{\text{CS}} = \frac{c_1}{4\pi} \int d^2x dt \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \dots$

(2+1)D CS.

Esimerkki: IQHE, luokka A (2 + 1)D:ssä

- Topologinen invariantti on johtavuus $\sigma_{xy} = Ne^2/h$.
- Liikemäärävaruuden Berryn konnektio
 $\mathcal{A}^{ab} = \langle u_a | \partial_{k_\alpha} | u_b \rangle dk_\alpha$, $a = 1, \dots, N$, $\alpha = 1, 2$ ja (**mitta**-)kentänvoimakkuus
 $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ määräävät 1. Chernin luvun:

$$\begin{aligned} \text{Ch}_1[\mathcal{F}] &\equiv C_1 = \frac{i}{2\pi} \int_{\text{BZ}} \text{tr} \mathcal{F} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int dk_x dk_y \sum_{a \in \text{occ}} \left[\partial_{k_x} \langle u_a | \partial_{k_y} | u_a \rangle - \partial_{k_y} \langle u_a | \partial_{k_x} | u_a \rangle \right]. \end{aligned}$$

TKNN [4]: $C_1 = \frac{\sigma_{xy}}{e^2/h}$.

- Toisaalta, $j^\mu = \frac{C_1}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho$, joka saadaan efektiivisestä CS-kenttäteoriasta
 $S_{\text{CS}} = \frac{C_1}{4\pi} \int d^2x dt \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \dots$
- ...joka voidaan johtaa suoraan gradienttiekspansiosta [5]:

$$S = \frac{\theta}{4} \int d^2x dt \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad \theta = \int \frac{d^2k d\omega}{(2\pi)^3} \varepsilon^{ij} \text{Tr} \mathcal{G} \partial_\omega \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G} \partial_{k_i} \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G} \partial_{k_j} \mathcal{G}^{-1}$$

$(4+1)D$ CS.

- Edellänähty $(2+1)D$ Chern-Simons on TRB.

(4+1)D CS.

- Edellänähty (2+1)D Chern-Simons on TRB.
- Seuraava Chern-Simons-teoria on (4+1)D:ssä [3]:

$$S = \frac{C_2}{24\pi^2} \int d^4x dt \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} A_\mu \partial_\nu A_\rho \partial_\sigma A_\tau,$$

$$C_2 = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{\text{BZ}} \text{tr} \mathcal{F}^2 = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{\text{BZ}} \text{tr} \mathcal{F}^2$$

$$= \frac{-\pi^2}{15} \int \frac{d^4k d\omega}{(2\pi)^5} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} \text{Tr} \mathcal{G} \partial_{k_\mu} \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G} \partial_{k_\nu} \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G} \partial_{k_\rho} \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G} \partial_{k_\sigma} \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G} \partial_{k_\tau} \mathcal{G}^{-1}$$

(4+1)D CS.

- Edellänähty (2+1)D Chern-Simons on TRB.
- Seuraava Chern-Simons-teoria on (4+1)D:ssä [3]:

$$S = \frac{C_2}{24\pi^2} \int d^4x dt \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} A_\mu \partial_\nu A_\rho \partial_\sigma A_\tau,$$

$$C_2 = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{\text{BZ}} \text{tr} \mathcal{F}^2 = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{\text{BZ}} \text{tr} \mathcal{F}^2$$

$$= \frac{-\pi^2}{15} \int \frac{d^4k d\omega}{(2\pi)^5} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} \text{Tr} \mathcal{G} \partial_{k_\mu} \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G} \partial_{k_\nu} \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G} \partial_{k_\rho} \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G} \partial_{k_\sigma} \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G} \partial_{k_\tau} \mathcal{G}^{-1}$$

- Dimensioreduktiolla All: (4+1) → (3+1) → (2+1).

Reduktio PHS-eristeisiin.

Esimerkki: luokka A $(2 + 1)D$:ssä \rightarrow luokka D $(1 + 1)D$:ssä.

Reduktio PHS-eristeisiin.

Esimerkki: luokka A $(2 + 1)D$:ssä \rightarrow luokka D $(1 + 1)D$:ssä.

Reduktio PHS-eristeisiin.

Esimerkki: luokka A $(2 + 1)D$:ssä \rightarrow luokka D $(1 + 1)D$:ssä.

- Merkitään $k_2 = \theta \in [0, \pi]$.

Reduktio PHS-eristeisiin.

Esimerkki: luokka A $(2 + 1)D$:ssä \rightarrow luokka D $(1 + 1)D$:ssä.

- Merkitään $k_2 = \theta \in [0, \pi]$.
- Gapitettujen Hamiltoniaanien avaruus on yhtenäinen

Reduktio PHS-eristeisiin.

Esimerkki: luokka A $(2 + 1)D$:ssä \rightarrow luokka D $(1 + 1)D$:ssä.

- Merkitään $k_2 = \theta \in [0, \pi]$.
- Gapitettujen Hamiltoniaanien avaruus on yhtenäinen
- \mathcal{H}_1 ja $\mathcal{H}_2 \Rightarrow \exists$ gapillinen interpolaatio $\mathcal{H}(k, \theta)$, s.e. $\mathcal{H}(k, 0) = \mathcal{H}_1(k)$,
 $\mathcal{H}(k, \pi) = \mathcal{H}_2(k)$.

Reduktio PHS-eristeisiin.

Esimerkki: luokka A $(2 + 1)D$:ssä \rightarrow luokka D $(1 + 1)D$:ssä.

- Merkitään $k_2 = \theta \in [0, \pi]$.
- Gapitettujen Hamiltoniaanien avaruus on yhtenäinen
- \mathcal{H}_1 ja $\mathcal{H}_2 \Rightarrow \exists$ gapillinen interpolaatio $\mathcal{H}(k, \theta)$, s.e. $\mathcal{H}(k, 0) = \mathcal{H}_1(k)$,
 $\mathcal{H}(k, \pi) = \mathcal{H}_2(k)$.
- PHS pitää ottaa lisäehdolla $U_C \mathcal{H}^*(k, \theta) U_C^\dagger = -\mathcal{H}(-k, 2\pi - \theta)$

Reduktio PHS-eristeisiin.

Esimerkki: luokka A $(2 + 1)D$:ssä \rightarrow luokka D $(1 + 1)D$:ssä.

- Merkitään $k_2 = \theta \in [0, \pi]$.
- Gapitettujen Hamiltoniaanien avaruus on yhtenäinen
- \mathcal{H}_1 ja $\mathcal{H}_2 \Rightarrow \exists$ gapillinen interpolaatio $\mathcal{H}(k, \theta)$, s.e. $\mathcal{H}(k, 0) = \mathcal{H}_1(k)$,
 $\mathcal{H}(k, \pi) = \mathcal{H}_2(k)$.
- PHS pitää ottaa lisäehdolla $U_C \mathcal{H}^*(k, \theta) U_C^\dagger = -\mathcal{H}(-k, 2\pi - \theta)$
- Kuten edellä, $C_1[\mathcal{H}(\mathbf{k}, \theta)] = \int d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \int \frac{dk}{2\pi} (-i) \sum_{\alpha \in \text{occ.}} \langle k, \theta, \alpha | \partial_k | k, \theta, \alpha \rangle$.

Reduktio PHS-eristeisiin.

Esimerkki: luokka A $(2 + 1)D$:ssä \rightarrow luokka D $(1 + 1)D$:ssä.

- Merkitään $k_2 = \theta \in [0, \pi]$.
- Gapitettujen Hamiltoniaanien avaruus on yhtenäinen
- \mathcal{H}_1 ja $\mathcal{H}_2 \Rightarrow \exists$ gapillinen interpolaatio $\mathcal{H}(k, \theta)$, s.e. $\mathcal{H}(k, 0) = \mathcal{H}_1(k)$,
 $\mathcal{H}(k, \pi) = \mathcal{H}_2(k)$.
- PHS pitää ottaa lisäehdolla $U_C \mathcal{H}^*(k, \theta) U_C^\dagger = -\mathcal{H}(-k, 2\pi - \theta)$
- Kuten edellä, $C_1[\mathcal{H}(\mathbf{k}, \theta)] = \int d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \int \frac{dk}{2\pi} (-i) \sum_{\alpha \in \text{occ.}} \langle k, \theta, \alpha | \partial_k | k, \theta, \alpha \rangle$.
- Eri parametrisointi $\Rightarrow \Delta C_1$ parillinen

Reduktio PHS-eristeisiin.

Esimerkki: luokka A $(2 + 1)D$:ssä \rightarrow luokka D $(1 + 1)D$:ssä.

- Merkitään $k_2 = \theta \in [0, \pi]$.
- Gapitettujen Hamiltoniaanien avaruus on yhtenäinen
- \mathcal{H}_1 ja $\mathcal{H}_2 \Rightarrow \exists$ gapillinen interpolaatio $\mathcal{H}(k, \theta)$, s.e. $\mathcal{H}(k, 0) = \mathcal{H}_1(k)$,
 $\mathcal{H}(k, \pi) = \mathcal{H}_2(k)$.
- PHS pitää ottaa lisäehdolla $U_C \mathcal{H}^*(k, \theta) U_C^\dagger = -\mathcal{H}(-k, 2\pi - \theta)$
- Kuten edellä, $C_1[\mathcal{H}(\mathbf{k}, \theta)] = \int d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \int \frac{dk}{2\pi} (-i) \sum_{\alpha \in \text{occ.}} \langle k, \theta, \alpha | \partial_k | k, \theta, \alpha \rangle$.
- Eri parametrisointi $\Rightarrow \Delta C_1$ parillinen
- Tämä johtaa luonnolliseen \mathbb{Z}_2 -luokitteluun: $N[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2] \equiv (-1)^{C[\mathcal{H}_{12}]}$ (ER)

Reduktio PHS-eristeisiin.

Esimerkki: luokka A $(2 + 1)D$:ssä \rightarrow luokka D $(1 + 1)D$:ssä.

- Merkitään $k_2 = \theta \in [0, \pi]$.
- Gapitettujen Hamiltoniaanien avaruus on yhtenäinen
- \mathcal{H}_1 ja $\mathcal{H}_2 \Rightarrow \exists$ gapillinen interpolaatio $\mathcal{H}(k, \theta)$, s.e. $\mathcal{H}(k, 0) = \mathcal{H}_1(k)$,
 $\mathcal{H}(k, \pi) = \mathcal{H}_2(k)$.
- PHS pitää ottaa lisäehdolla $U_C \mathcal{H}^*(k, \theta) U_C^\dagger = -\mathcal{H}(-k, 2\pi - \theta)$
- Kuten edellä, $C_1[\mathcal{H}(\mathbf{k}, \theta)] = \int d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \int \frac{dk}{2\pi} (-i) \sum_{\alpha \in \text{occ.}} \langle k, \theta, \alpha | \partial_k | k, \theta, \alpha \rangle$.
- Eri parametrisointi $\Rightarrow \Delta C_1$ parillinen
- Tämä johtaa luonnolliseen \mathbb{Z}_2 -luokitteluun: $N[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2] \equiv (-1)^{C[\mathcal{H}_{12}]}$ (ER)
- Valitaan vielä tyhjiö/triviaali luokka \mathcal{H}_0 – täysin lokaali Hamiltoniaani – ja määritellään

$$N_1[\mathcal{H}_1] \equiv N[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1 = 1 & \text{triviaalit} \\ N_1 = -1 & \text{eitriviaalit.} \end{cases}$$

Reduktio yleisesti.

- Ryu et al tekevät saman kaikille kiraalisille luokille mielivaltaisessa avaruusulottovuudessa.

Reduktio yleisesti.

- Ryu et al tekevät saman kaikille kiraalisille luokille mielivaltaisessa avaruusulottovuudessa.
- Reduktio kytkee eri luokat ja dimensiot.

Nimi	TR	PH	SL	Classifying space	π_0	π_1	π_2	π_3
A	0	0	0	$\frac{U(N+M)}{U(N) \times U(M)}$	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}	-
AI	+1	0	0	$\frac{O(N+M)}{O(N) \times O(M)}$	\mathbb{Z}	-	-	-
AII	-1	0	0	$\frac{Sp(N+M)}{Sp(N) \times Sp(M)}$	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
AIII	0	0	1	$U(N)$	-	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}
BDI	+1	+1	1	$O(2N)$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	-	-
CII	-1	-1	1	$Sp(2N)$	-	\mathbb{Z}	-	\mathbb{Z}_2
D	0	+1	0	$O(2N)/U(N)$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	-
C	0	-1	0	$Sp(2N)/U(N)$	-	-	\mathbb{Z}	-
DIII	-1	+1	1	$U(2N)/Sp(2N)$	-	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}
CI	+1	-1	1	$U(N)/O(N)$	-	-	-	\mathbb{Z}

Pohdintaa.

- Reunatilojen stabiilisuus

Pohdintaa.

- Reunatilojen stabiilisuus
- Vuorovaikutukset ja kenttäteoriat

Pohdintaa.






- Reunatilojen stabiilisuus
- Vuorovaikutukset ja kenttäteoriat
- Magnetoelektrinen efekti

Pohdintaa.

- Reunatilojen stabiilisuus
- Vuorovaikutukset ja kenttäteoriat
- Magnetoelektrinen efekti

Kiitos!

Lähteet.

-  Shinsei Ryu, Andreas P. Schnyder, Akira Furusaki, and Andreas W. W. Ludwig, *Topological insulators and superconductors: tenfold way and dimensional hierarchy*, New Journal of Physics **12**, 065010 (2010)
-  Martin R. Zirnbauer, *Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory*, J. Math. Phys. 37, 4986 (1996), DOI:10.1063/1.531675
-  Xiao-Liang Qi, Taylor L. Hughes, and Shou-Cheng Zhang, *Topological field theory of time-reversal invariant insulators*, Phys. Rev. B **78**, 195424 (2008)
-  D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, *Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential*, Phys. Rev. Lett. 49, 405 (1982)
-  G. E. Volovik, *Analog of quantum Hall effect in superfluid ^3He film*, Sov. Phys. JETP **67**, 1804 - 1811 (1988)