Kahden kentän slow-roll inflaatio

Stanislav Rusak

Helsingin ylioposto

17.03.2011

Esitelmän rakenne

- Monikenttäinflaatio (kertaus)
- Kahden kentän ei-kanoninen inflaatio
- Slow-roll approksimaatio
- Perturbaatioiden spektri
- Inflaatioparametrien määrittäminen
- Yhteenveto

Monikenttäinflaatio

- Yksi kenttä:
  - Tuottaa adiabaattisten kaarevuusperturbaatioiden spektrin joka pysyy vakiona horisontista ulosmenon jälkeen ($k \ll aH$)
  - Primordiaalinen tehospektri suorassa yhteydessä spektriin horisontin ulosmenon hetkellä
- Monta kenttää:
  - Motivaationa korkeiden energioiden fysiikka
  - Voi olla ei-kanonisia kineettisia termejä
  - Kaarevuusperturbaatio ei pysy vakiona suurilla skaaloilla
  - Entropiaperturbaatiot syöttävät kaarevuusperturbaatioita

Malli

- Aktio:

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{RM_{\mathrm{pl}}^2}{2} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}G_{IJ}\partial_\mu\phi^I\partial_\nu\phi^J - V(\phi^I)\right]$$
$$= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{RM_{\mathrm{pl}}^2}{2} - \frac{g^{\mu\nu}}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{e^{2b(\varphi)}}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi - V(\varphi,\chi)\right]$$

- Kenttäavaruuden metriikka $G_{IJ} = \mathrm{diag}(1, e^{2b(\varphi)})$
- Esim. yleistetty painovoima, säieteoriat
- Liikeyhtälöt

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_\varphi = b_\varphi e^{2b}\dot{\chi}^2$$
$$\ddot{\chi} + (3H + 2b_\varphi\dot{\varphi})\dot{\chi} + e^{-2b}V_\chi = 0$$

Perturbaatiot

- Perturbaatiot homogeenisen taustan ympärillä
  $\phi^I(x) \to \phi^I(t) + Q^I(x), \quad g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}^{\mathrm{RW}}(t) + \delta g_{\mu\nu}(x)$
- Laakea mitta: kenttäperturbaatiot toimivat fysikaalisina vapausasteina
- Liikeyhtälöt

$$\mathcal{D}_t^2 Q^I + 3H\mathcal{D}_t Q^J + \frac{k^2}{a^2} Q^I + G^{IJ}\mathcal{M}_{IK} Q^K = 0, \quad \text{missä}$$

$$\mathcal{M}_{IJ} = \mathcal{D}_I \mathcal{D}_J V - \mathcal{R}_{IKLJ}\dot{\phi}^K \dot{\phi}^L - \frac{8\pi G}{a^3}\mathcal{D}_t \left[\frac{a^3 \dot{\phi}_I \dot{\phi}_J}{H} \right]$$

Adiabaattiset ja entropiaperturbaatiot

- Jaetaan perturbaatiot taustaratkaisun radan suuntaiseksi ja sitä vastaan kohtisuorassa olevaksi komponenteiksi $Q^I = Q_\sigma e^I_\sigma + Q_s e^I_s$
- Adiabaattinen yksikkövektori $e^I_\sigma = \frac{\dot{\phi}^I}{\dot{\sigma}} \quad (\dot{\sigma} \equiv \sqrt{G_{IJ}\dot{\phi}^I\dot{\phi}^J})$
- Liikeyhtälöt

$$\ddot{Q}_\sigma + 3H\dot{Q}_\sigma + \left[\frac{k^2}{a^2} + V_{\sigma\sigma} - \frac{V_s^2}{\dot{\sigma}^2} - \frac{8\pi G}{a^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{a^3\dot{\sigma}^2}{H}\right)\right] Q_\sigma = - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V_s}{\dot{\sigma}}Q_s\right) + 2\left(\frac{V_\sigma}{\dot{\sigma}} + \frac{\dot{H}}{H}\right)\frac{V_s}{\dot{\sigma}}Q_s,$$

$$\ddot{Q}_s + 3H\dot{Q}_s + \left[\frac{k^2}{a^2} + V_{ss} + 3\frac{V_s^2}{\dot{\sigma}^2} - (b_{\varphi\varphi} + b_\varphi^2)\dot{\sigma}^2\right] Q_s = -\frac{k^2}{a^2}\frac{\Psi}{2\pi G}\frac{V_s}{\dot{\sigma}^2}$$

- Liikeyhtälöt ovar riippumattomia jos taustaratkaisun rata kenttäavaruudessa on geodeesi $(V_s/\dot{\sigma} = 0)$

Slow-roll approksimaatio

- Slow-roll ehdot

$$\left\{|\ddot{\varphi}|, |b_\varphi e^{2b}\dot{\chi}^2|\right\} \ll \{|V_\varphi|, 3|H\dot{\varphi}|\}, \quad \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 \ll V$$
$$\left\{|\ddot{\chi}|e^{2b}, |b_\varphi e^{2b}\dot{\varphi}\dot{\chi}|\right\} \ll \{|V_\chi|, 3|H\dot{\chi}|\}$$

- Slow-roll yhtälöt

$$\dot{\varphi} \simeq -\frac{V_\varphi}{3H}, \quad \dot{\chi} \simeq -\frac{V_\chi}{3H}e^{-2b}, \quad H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3}V$$

- Slow-roll parametrit

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \tilde{\eta}_{IJ} = M_{\rm pl}^2\frac{\mathcal{D}_I\mathcal{D}_J V}{V^2}, \quad \tilde{\eta}_{mn} = e_m^I e_n^J \tilde{\eta}_{IJ} \quad m, n = \sigma, s$$

Dynamiikka horisontin sisällä

- Vapausasteiden $u^I = aQ^I$ kehityksen konformaalisen ajan ($\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/a$) suhteen määräävät liikeyhtälöt

$$\mathcal{D}_\tau^2 u^I + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right) u^I - \frac{3}{\tau^2} G^{IJ} \left(\epsilon G_{JK} + 2\epsilon_{JK} - \tilde{\eta}_{JK}\right) u^K = 0$$

- Liikeyhtälöt kytketty, riippumattomat yhtälöt saadaan menemällä kantaan joka diagonalisoi vuorovaikutusmatriisin $M_{IJ} = \epsilon G_{JK} + 2\epsilon_{JK} - \tilde{\eta}_{JK}$ horisontin läpimenohetkellä
- Uudessa kannassa

$$v_m'' + \left[k^2 - \frac{1}{\tau^2}\left(2 + 3\lambda_m\right)\right] v_m = 0$$

$$\lambda_{1,2} \simeq \frac{1}{2}\left[4\epsilon - (\tilde{\eta}_{\sigma\sigma} - \tilde{\eta}_{ss}) \pm \sqrt{[2\epsilon - (\tilde{\eta}_{\sigma\sigma} - \tilde{\eta}_{ss})]^2 + 4\tilde{\eta}_{\sigma s}^2}\right]_*$$

- Ratkaisu $v_m \simeq i e^{i\lambda_m \frac{\pi}{2}} (1 + C\lambda_m) \frac{1}{\sqrt{2k}} (-k\tau)^{-1-\lambda_m}$ ($C \approx 0.7296$)

Spektri

- Tehospektrit saadaan kvanttisoimalla vapausasteet v_m ja laskemalla kaksipistefunktiot: $\mathcal{C}_{\mathcal{XY}}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \equiv \frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3}\langle\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathcal{Y}^*(\mathbf{k}')\rangle$
- Tietyn skaalan kulkiessa horisontista läpi vastaavien kaarevuus- ($\mathcal{R} = \frac{H}{\dot{\sigma}}Q_\sigma$) ja isokurvatuuriperturbaatioiden ($\mathcal{S} = \frac{H}{\dot{\sigma}}Q_s$) spektrit ovat

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathcal{R}*} &= \left(\frac{H_*^2}{2\pi\dot{\sigma}_*}\right)^2 [1 + (-2+6C)\epsilon - 2C\tilde{\eta}_{\sigma\sigma}] \\
\mathcal{C}_{\mathcal{RS}*} &= -\left(\frac{H_*^2}{2\pi\dot{\sigma}_*}\right)^2 2\tilde{\eta}_{\sigma s} \\
\mathcal{P}_{\mathcal{S}*} &= \left(\frac{H_*^2}{2\pi\dot{\sigma}_*}\right)^2 [1 + (-2+2C)\epsilon - 2C\tilde{\eta}_{ss}]
\end{aligned}
$$

- Perturbaatiot korreloituja mentyään horisontista ulos

Kehitys suurilla skaaloilla

- Horisontin ulkopuolella

$$\dot{\mathcal{R}} = \alpha(t)H\mathcal{S}$$
$$\dot{\mathcal{S}} = \beta(t)H\mathcal{S}$$

missä $\alpha = -2\tilde{\eta}_{\sigma s}, \quad \beta = -2\epsilon + \tilde{\eta}_{\sigma\sigma} - \tilde{\eta}_{ss}$

- Perturbaatioiden kehitys mallikohtainen
- Paramertisoidaan kehitys mallista riippumattomalla tavalla käyttäen siirtofunktioita

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T_{\mathcal{RS}} \\ 0 & T_{\mathcal{SS}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_* \\ \mathcal{S}_* \end{pmatrix}.$$

- Siirtofunktiot riippuvat skaalasta vain horisontista ulos tulon ajan kautta

Primordiaalinen spektri

- Kehitys inflaation loputtua tiedetään $\Rightarrow$ primordiaaliset spektrit säteilyn dominoimalla kaudella saadaan datasta
- Mitattavia suureita: spetrit $(\mathcal{P}_\mathcal{R}, \mathcal{P}_\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\mathcal{RS}})$, spektri-indeksit $(n_\mathcal{X} = \mathrm{d} \ln \mathcal{P}_\mathcal{X} / \mathrm{d} \ln k)$, juoksu $(\alpha_\mathcal{X} = \mathrm{d} n_\mathcal{X} / \mathrm{d} \ln k)$
- Primordiaaliset spektrit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\mathcal{R} &= \mathcal{P}_{\mathcal{R}*} + 2T_{\mathcal{RS}}\mathcal{C}_{\mathcal{RS}*} + T^2_{\mathcal{RS}}\mathcal{P}_{\mathcal{S}*} \\
\mathcal{C}_{\mathcal{RS}} &= T_{\mathcal{SS}}\mathcal{C}_{\mathcal{RS}*} + T_{\mathcal{SS}}T_{\mathcal{RS}}\mathcal{P}_{\mathcal{S}*} \\
\mathcal{P}_\mathcal{S} &= T^2_{\mathcal{SS}}\mathcal{P}_{\mathcal{S}*}
\end{aligned}$$

- Spektri-indeksit $(\cos\Delta \equiv \frac{\mathcal{C}_{\mathcal{RS}}}{\sqrt{\mathcal{P}_\mathcal{R}\mathcal{P}_\mathcal{S}}})$

$$\begin{aligned}
n_\mathcal{R} &\simeq -(6 - 4\cos^2\Delta)\epsilon + 2\sin^2\Delta\tilde{\eta}_{\sigma\sigma} + 4\sin\Delta\cos\Delta\tilde{\eta}_{\sigma s} + 2\cos^2\Delta\tilde{\eta}_{ss} \\
n_\mathcal{S} &\simeq -2\epsilon + 2\tilde{\eta}_{ss} \\
n_\mathcal{C} &\simeq -2\epsilon + 2\tan\Delta\tilde{\eta}_{\sigma s} + 2\tilde{\eta}_{ss}
\end{aligned}$$

Spektri-indeksien juoksu

- Juoksu $\alpha_{\mathcal{X}} = \mathrm{d}n_{\mathcal{X}}/\mathrm{d}\ln k$ on korkeampaa kertalukua slow-roll parametreissa

$$
\begin{aligned}
\alpha_{\mathcal{R}} \simeq\ & 8(-3 + 4\cos^2\Delta - 2\cos^4\Delta)\epsilon^2 + \sin^2 2\Delta\tilde{\eta}_{\sigma\sigma}^2 + 4\cos^2 2\Delta\tilde{\eta}_{\sigma s}^2 \\
& + \sin^2 2\Delta\tilde{\eta}_{ss}^2 + 4(4 - 7\cos^2\Delta + 4\cos^4\Delta)\epsilon\tilde{\eta}_{\sigma\sigma} + 32\sin^3\Delta\cos\Delta\epsilon\tilde{\eta}_{\sigma s} \\
& + 4\cos^2\Delta(5 - 4\cos^2\Delta)\epsilon\tilde{\eta}_{ss} + 2\sin 4\Delta\tilde{\eta}_{\sigma\sigma}\tilde{\eta}_{\sigma s} - 2\sin^2 2\Delta\tilde{\eta}_{\sigma\sigma}\tilde{\eta}_{ss} \\
& - 2\sin 4\Delta\tilde{\eta}_{\sigma s}\tilde{\eta}_{ss} - 2\sin^2\Delta\tilde{\xi}_{\sigma\sigma\sigma} - 2\sin 2\Delta\tilde{\xi}_{\sigma\sigma s} - 2\cos^{\Delta}\tilde{\xi}_{\sigma ss} \\
\alpha_{\mathcal{S}} \simeq\ & -8\epsilon^2 + 4\epsilon(\tilde{\eta}_{\sigma\sigma} + \tilde{\eta}_{ss}) + 4\tilde{\eta}_{\sigma s}^2 - 2\tilde{\xi}_{\sigma ss} \\
\alpha_{\mathcal{C}} \simeq\ & \alpha_{\mathcal{S}} + 4\tan\Delta\tilde{\eta}_{\sigma s}(\tilde{\eta}_{\sigma\sigma} - \tilde{\eta}_{ss}) - 4\tan^2\Delta\tilde{\eta}_{\sigma s}^2 - 2\tan\Delta\tilde{\xi}_{\sigma\sigma s}
\end{aligned}
$$

- Korrelaatiospektri voi riippua voimakkaasti skaalasta jos perturbaatiot ovat heikosti korreloimattomia ($\cos\Delta \approx 0$)

Kanoninen inflaatio

- Ensimmäinen kertaluku
  7 inflaatioparametria: $\epsilon, \eta_{\sigma\sigma}, \eta_{\sigma s}, \eta_{ss}, T_{\mathcal{RS}}, T_{\mathcal{SS}}, H_*$
  6 havaittavaa suuretta: 3 spektria + 3 spektri-indeksia
- Toinen kertaluku: 3 uutta havaittavaa suuretta (juoksu), 3 uutta inflaatioparametria ($\sim V_{,IJK}$)
- Gravitaatioaallot: 2 (3) uutta havaittavaa suuretta ensimmäisessä (toisessa) kertaluvussa
  $\mathcal{P}_T = \frac{8}{M_{\rm pl}^2}\left(\frac{H}{2\pi}\right)_*^2, \quad n_T = -2\epsilon, \quad (\alpha_T = -8\epsilon^2 - 4\epsilon\tilde{\eta}_{\sigma\sigma})$
- Voidaan ratkaista inflaatioparametrit datasta $\Rightarrow$ inflaatiopotentiaalin muoto
- Mallista riippumaton konsistenssiehto
  $r = \mathcal{P}_\mathcal{R}/\mathcal{P}_T = -8n_T(1-\cos^2\Delta)$

Epäkanoninen inflaatio

- Kineettinen termi $\frac{1}{2}G_{IJ}\dot{\phi}^I\dot{\phi}^J = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}e^{2b(\varphi)}\dot{\chi}^2$
- Kovariantit slow-roll parametrit $\tilde{\eta}$ eivät erota potentiaalin ja kenttäavaruuden metriikan kotribuutioita toisistaan
- Vaihtoehtoiset parametrit $\eta_{IJ} = M_{\rm pl}^2\frac{V_{,IJ}}{V}$, $\epsilon_b = 8M_{\rm pl}^2 b_{,\varphi}^2$

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_{\sigma\sigma} &\simeq \eta_{\sigma\sigma} - \sqrt{\epsilon_b\epsilon}\sin^2\theta\cos\theta, \qquad \cos\theta \equiv \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\sigma}}, \quad \sin\theta \equiv \frac{\dot{\chi}e^b}{\dot{\sigma}} \\
\tilde{\eta}_{\sigma s} &\simeq \eta_{\sigma s} + \sqrt{\epsilon_b\epsilon}\sin^3\theta, \\
\tilde{\eta}_{ss} &\simeq \eta_{ss} + \sqrt{\epsilon_b\epsilon}\cos\theta(1+\sin^2\theta)
\end{aligned}$$

- Ensimmäinen kertaluku: 9 inflaatioparametria: $\epsilon_b, \epsilon, \eta_{\sigma\sigma}, \eta_{\sigma s}, \eta_{ss}, T_{\mathcal{RS}}, T_{\mathcal{SS}}, H_*, \theta_*$
- Toinen kertaluku: 4 uutta inflaatioparametria $(\sim V_{,IJK}, \sim b_{,\varphi\varphi})$

Mallikohtaiset tulokset

- Ei ole riittävästi tietoa inflaatioparametrien määrittämiseen $\Rightarrow$ etsitään mallikohtaisia tuloksia
- Jos taustaratkaisun rata $\simeq$ geodeesi ($\tilde{\eta}_{\sigma s} \simeq 0$), saadaan konsistenssiehdot $n_{\mathcal{S}} = n_{\mathcal{C}}$, $\alpha_{\mathcal{S}} = \alpha_{\mathcal{C}}$
  - Voidaan käsitellä σ inflatonina
  - Inflatoni skenaario: jos kaarevuus- ja isokurvatuuriperturbaatiot ovat edelleen kytkemättömiä inflaation jälkeen, promordiaalinen kaarevuusperturbaatio tulee inflatonin perturbaatioista ($\cos\Delta \simeq 0$). Konsistenssirelaatio $r = -8n_T$
  - Kurvatoni skenaario: jos inflatonin hajottua maailmankaikkeutta alkaa dominoida toinen skalaarikenttä ('kurvatoni'), promordiaalinen kaarevuusperturbaatio voi syntyä tämän kentän perturbaatioista ($\cos\Delta \simeq 1$). Konsistenssirelaatiot: $n_{\mathcal{R}} = n_{\mathcal{S}} = n_{\mathcal{C}}$, $\alpha_{\mathcal{R}} = \alpha_{\mathcal{S}} = \alpha_{\mathcal{C}}$

Yhteenveto

- Monikenttäinflaatiossa skalaariperturbaatioiden spektrit kehittyvät horisontin ulkopuolella mallista riippuen
- Kehitystä voidaan tarkastella slow-roll approksimaatiossa
- Perturbaatioiden spektriparametrit antavat tietoa siitä mitä tapahtui inflaation aikana kun havaittavat suureet menivät horisontista ulos
- Mittaustarkkuuden parantuessa enemmän tieota voidaan saada mm. gravitaatoaalloista, epägaussisuudesta
- Epäkanoniset kineettiset termit tuovat uusia parametreja, mikä tekee inlfaatioparametrien määrittämisen vaikeaksi
- Voidaan etsiä mallikohtaisia ennusteita