QUANTUM MECHANICS II Spring 2003 **Partial Examination 2/2**

Friday 16 May at 10-14 in aud E204

1. (a) Briefly define what is meant by an anti-unitary operator such as time reversal, Θ.
   (b) Show that the wave function $\langle \mathbf{x}|\alpha\rangle$ of any state $|\alpha\rangle$ is the complex conjugate of the wave function of the time-reversed state $\Theta|\alpha\rangle$, with the phase convention $\Theta|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle$.
   (c) Using the result in (b), show that the wave function $\langle \mathbf{x}|n\rangle$ of a non-degenerate eigenstate $|n\rangle$ of the Hamiltonian H can be chosen to be real if $\Theta H \Theta^{-1} = H$.
   (d) Prove Kramer's degeneracy: States with an odd number of fermions are degenerate if the Hamiltonian is invariant under time reversal. *Hint:* Use $\Theta^2|n\rangle = (-1)^{2j}|n\rangle$.

2. The density operator is defined as $\rho = \sum_i w_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$.

   (a) Briefly explain the meaning of the density operator. What (if any) restrictions apply to the quantities w_i and $|\alpha_i\rangle$? Define the ensemble average $[A]$ of an operator $\hat{A}$ and express it in terms of ρ.
   (b) In a partially polarized beam the electron has $S_z = \frac{1}{2}$ with probability .75 and $S_x = \frac{1}{2}$ with probability .25. Find the 2×2 density matrix of the beam, in the basis formed by the states $|S_z = \pm\frac{1}{2}\rangle$.

3. Consider two particles in a two-level system. The basis states $|i, j\rangle \equiv |i\rangle|j\rangle$ satisfy $H|i, j\rangle = (E_i + E_j)|i, j\rangle$, where $i, j = \pm$.

   Construct the density matrix by assigning each basis state of energy E a statistical probability proportional to $\exp(-\beta E)$, in the case that the two particles are (i) distinguishable, (ii) identical bosons and (iii) identical fermions.

4. Consider the non-relativistic fermionic field operator

$$\psi_f^\dagger(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\, b_\mathbf{p}^\dagger \qquad \text{where } \left\{b_\mathbf{p}, b_{\mathbf{p}'}^\dagger\right\} = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}').$$

   (a) Show that $\left\{\psi_f(\mathbf{r}),\, \psi_f^\dagger(\mathbf{r}')\right\} = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ and that $\psi_f^\dagger(\mathbf{r})\psi_f^\dagger(\mathbf{r}) = 0$.
   (b) Find the time dependence of the free field $\psi_f^\dagger(\mathbf{r}, t)$ in the Heisenberg picture. $H_0 = \int d^3\mathbf{p}/(2\pi)^3\, \mathbf{p}^2/2m\, b_\mathbf{p}^\dagger b_\mathbf{p}$.

5. The Klein-Gordon equation is $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0$.

   (a) Derive its plane-wave solutions.
   (b) Show that the 4-current $j^\mu = i\left[\phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi\right]$ is conserved.
   (c) Show that the probability density $j^0 < 0$ for negative energy solutions. What is the physical interpretation of such solutions?

KVANTTIMEKANIIKKA II Kevät 2003 **Välikoe 2/2**

Perjantaina 16 toukokuuta klo 10-14 salissa E204

1. (a) Anna lyhyesti antiunitaarisen operaattorin (kuten ajankäännös Θ) ominaisuudet.
   (b) Näytä, että mielivaltaisen tilan $|\alpha\rangle$ aaltofunktio $\langle \mathbf{x}|\alpha\rangle$ on aikakäännetyn tilan $\Theta|\alpha\rangle$ aaltofunktion kompleksikonjugaatti, kun $\Theta|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle$.
   (c) Osoita (b)-kohdan perusteella, että Hamiltonin operaattorin H ominaistilan $|n\rangle$ aaltofunktio $\langle \mathbf{x}|n\rangle$ voidaan valita reaaliseksi, jos tila ei ole degeneroitunut ja $\Theta H \Theta^{-1} = H$.
   (d) Todista Kramersin degeneraatio: Ajankäännöksessä invariantin Hamiltonin operaattorin ominaistila on degeneroitunut, jos siinä on pariton lukumäärä fermioneja. *Vihje:* Käytä $\Theta^2|n\rangle = (-1)^{2j}|n\rangle$.

2. Tiheysoperaattorin määritelmä on $\rho = \sum_i w_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$.
   (a) Selvitä lyhyesti tiheysoperaattorin merkitys. Onko määritelmässä ehtoja suureiden w_i ja $|\alpha_i\rangle$ suhteen? Määrittele operaattorin $\hat{A}$ keskiarvo (ensemble average) $[A]$ ja anna sen lauseke ρ:n avulla.
   (b) Osittain polarisoidussa suihkussa elektronilla on $S_z = \frac{1}{2}$ todennäköisyydellä .75 ja $S_x = \frac{1}{2}$ todennäköisyydellä .25. Laske suihkun 2×2 tiheysmatriisi tilojen $|S_z = \pm\frac{1}{2}\rangle$ muodostamassa kannassa.

3. Kaksitilasysteemissä on kaksi hiukkasta. Kantatiloille $|i, j\rangle \equiv |i\rangle|j\rangle$ pätee $H|i,j\rangle = (E_i + E_j)|i,j\rangle$, missä $i, j = \pm$.

   Muodosta tiheysmatriisi antamalla joka kantatilalle tekijään $\exp(-\beta E)$ verrannollinen tilastollinen paino, missä E on tilan energia, kun hiukkaset ovat (i) toisistaan erottuvia, (ii) identtisiä bosoneja ja (iii) identtisiä fermioneja.

4. Ei-relativistisen fermionin kenttäoperaattori on

$$\psi_f^\dagger(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\, b_\mathbf{p}^\dagger \qquad \text{missä} \quad \left\{b_\mathbf{p}, b_{\mathbf{p}'}^\dagger\right\} = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}').$$

   (a) Näytä, että $\left\{\psi_f(\mathbf{r}),\, \psi_f^\dagger(\mathbf{r}')\right\} = \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ ja $\psi_f^\dagger(\mathbf{r})\psi_f^\dagger(\mathbf{r}) = 0$.
   (b) Johda vapaan kentän $\psi_f^\dagger(\mathbf{r}, t)$ aikariippuvuus Heisenbergin kuvassa. $H_0 = \int d^3\mathbf{p}/(2\pi)^3\, \mathbf{p}^2/2m\, b_\mathbf{p}^\dagger b_\mathbf{p}$.

5. Klein-Gordon yhtälö on $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0$.
   (a) Johda sen tasoaaltoratkaisut.
   (b) Näytä, että 4-virta $j^\mu = i\left[\phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi\right]$ säilyy.
   (c) Näytä, että todennäköisyystiheys $j^0 < 0$ ratkaisuille, joilla on negatiivinen energia. Mikä on näiden ratkaisujen fysikaalinen tulkinta?