

1. Selvitä lyhyesti kierron vaikutusta impulssimomentin ominaistiloihin. Erityisesti:
 - (a) Lausu yleinen kierto-operaattori $R(\alpha, \beta, \gamma)$ Eulerin kulmien α, β, γ ja impulssimomenttioperaattorien avulla.
 - (b) Anna kierto-operaattorin $R(\alpha, \beta, \gamma)$ matriisiesitys $J = 0$ ja $J = \frac{1}{2}$ tapauksissa (voit jättää vastauksesi matriisitulon muotoon).
 - (c) Mitä ovat Wignerin $3j$ ja $6j$ symbolit, ja mihin niitä tarvitaan?

2. Selvitä lyhyesti Diracin yhtälö ja sen merkitystä. Erityisesti:

- (a) Näytä, että vapaalle hiukkaselle Diracin yhtälöstä seuraa $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$.
- (b) Anna tulkinta ratkaisuille, joiden energia $E < 0$.
- (c) Löydä vapaan hiukkasen $E > 0$ tasoaaltoratkaisut matriisiesityksessä

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

(Paulin matriiseja ei tarvitse kirjoittaa auki).

3. (a) Anna tiheysoperaattorin ρ määritelmä ja selvitä lyhyesti sen merkitys.
- (b) Johda tiheysoperaattorin aikariippuvuus Schrödingerin kuvassa.
- (c) Näytä, että puhdas joukko (pure ensemble) hetkellä $t = 0$ ei voi kehittyä sekoituneeksi joukoksi (mixed ensemble), jos sen aikakehitys on Schrödingerin yhtälön mukainen.
4. (a) Määrää harmonisen värähtelijän tuotto- ja tuho-operaattorien a^\dagger , a käyttäytyminen pariteettimuunnoksessa ja ajankäännössä, kun

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x + i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} p \right).$$

- (b) Onko Hamiltonin operaattori $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ invariantti pariteettimuunnoksessa ja/tai ajankäännössä? Anna esimerkki (hermiittisestä) Hamiltonin funktiosta joka ei ole invariantti näissä muunnoksissa, ja lausu se sekä operaattorien a , a^\dagger että x , p avulla.
5. Olkoon kolme hiukkasta yksi-dimensionaalisen harmonisen värähtelijän potentiaalissa, ja hiukkasten yhteenlaskettu kokonaisenergia $E = (9/2)\hbar\omega$.
 - (a) Jos ne ovat toisistaan erottuvia (vaikka kaikilla on sama massa), mitä mahdollisia miehityslukuja harmonisen värähtelijän tiloilla on? Kuinka monta erilaista kolmen hiukkasen tilaa voi näistä miehitysluvuista rakentaa? Mikä on todennäköisin konfiguraatio?
 - (b) Toista kohta (a) tapauksessa, jossa hiukkaset ovat identtisiä fermioneja (unohda spin).
 - (c) Toista kohta (a) tapauksessa, jossa hiukkaset ovat identtisiä bosoneja (unohda spin).