

Perjantaina 5. maaliskuuta klo 14-18 salissa E204

1. Alice ja Bob aikovat lähettää toisilleen yksityisellä salausavaimella suojattuja viestejä ("Private Key Cryptography"). Alice lähettää ensin Bobille avaimen käyttämällä polarisoituja elektroneja. Selvitä lyhyesti se periaate, jolla he pystyvät varmistamaan kvanttimekaanisesti, ettei Eve välillä lue viestiä. (Ei tarvitse selittää, miksi menetelmä toimii.)
2. Olkoon $U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\sigma_x)$.
 - (a) Näytä, että $U \in SU(2)$ ja että $\{\mathbb{1}, U^2, U^4, U^6\}$ muodostavat $SU(2)$:n aliryhmän.
 - (b) Kohdan (a) perusteella U määrittelee kierron R kolmiulotteisessa avaruudessa. Etsi $\hat{n} = R\hat{z}$, missä \hat{z} on z -akselin suuntainen yksikkövektori.
3. Hiukkanen on yksiulotteisessa harmonisen värähtelijän potentiaalissa $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Hetkellä $t = 0$ sen tilavektori on $\exp(-i\hat{p}d/\hbar)|0\rangle$, missä \hat{p} on impulssioperaattori, d on luku, jolla on pituuden dimensio ja $|0\rangle$ on värähtelijän perustila.
 - (a) Ratkaise $\hat{x}(t)$ Heisenbergin kuvassa.
 - (b) Laske odotusarvo $\langle \hat{x}(t) \rangle$ kun $t \geq 0$.
4. Yleinen 3×3 tensorioperaattori T_{ij} ($i, j = x, y, z$) voidaan jakaa kolmeen osaan, joista ensimmäinen on verrannollinen yksikkömatriisiin, toinen on antisymmetrinen ja kolmas on symmetrinen ja jäljetön:

$$T_{ij} = \frac{\text{tr}(T)}{3}\delta_{ij} + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) + \left[\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{\text{tr}(T)}{3}\delta_{ij} \right]$$

- (a) Näytä, että kaksi ensimmäistä osaa kuvautuvat itselleen yleisessä avaruuden kierrossa R : $T_{ij} \rightarrow \sum_{k,l} R_{ik}R_{jl}T_{kl}$.
- (b) Muodosta (Clebsch-Gordan taulukoiden avulla) pallotensorioperaattorit $T_q^{(k)}$, joiden kertaluku on $k = 0$ ja 1 , karteesisesta tensorioperaattorista $T_{ij} = u_i v_j$. Tässä \mathbf{u}, \mathbf{v} tavallisia 3-vektorioperaattoreita, jotka muuntuvat kuten $\mathbf{u} \rightarrow R\mathbf{u}$. (Muista, että pallovektoreille $u_{\pm} = \mp(u_x \pm iu_y)/\sqrt{2}$.)
5. (a) Selitä lyhyesti, mikä on Aharonovin-Bohmin ilmiö.
- (b) Näytä, että vektoripotentialiksi sylinterisymmetrisessä alueessa $\rho > \rho_a$, missä magneettikenttä häviää, voidaan valita $\mathbf{A} = \hat{\phi} B \rho_a^2 / 2\rho$. Tässä B on (vakio-) magneettikenttä alueessa $\rho < \rho_a$ ja $\hat{\phi}$ on atsimutaalisuunnan yksikkövektori.
- (c) Näytä, että vektoripotentialiaali voidaan ilmaista gradienttina: $\mathbf{A} = \nabla\Lambda$. Etsi Λ .
- (d) *Bonuskysymys*: Miksi emme voi asettaa vektoripotentialiaali nolaksi mittamuunnoksella $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla\Lambda$?

Oikeista ratkaisuksista tehtäviin 1 – 4 saa 6 pistettä, ja tehtävästä 5 saa 8 pistettä. Voit käyttää tehtävissä apuna kokeessa jaettavia Clebsch-Gordan kertoimien taulukkoa ja sylinterikoordinaateissa annettuja derivaattaoperaattoreita.

Friday 5 March at 14-18 in aud E204

1. Alice and Bob wish to use private key cryptography, and hence need to exchange a secret key. Alice transmits the key to Bob using a beam of polarized electrons. Sketch the principles of how they are able to make quantum mechanically sure that the message is not being listened to on the way by eavesdropper Eve. (You need not explain why the method works.)
2. Consider the matrix $U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\sigma_x)$.
 - (a) Show that $U \in SU(2)$, and that $\{\mathbb{1}, U^2, U^4, U^6\}$ form a subgroup of $SU(2)$.
 - (b) According to (a), U defines a rotation R of three-dimensional space. Determine $\hat{n} = R\hat{z}$ where \hat{z} is a unit vector in the z -direction.
3. Consider a particle subject to a one-dimensional harmonic oscillator potential $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Suppose at $t = 0$ the state vector is given by $\exp(-i\hat{p}d/\hbar)|0\rangle$, where \hat{p} is the momentum operator, d is some number with dimension of length and $|0\rangle$ is the ground state of the oscillator.
 - (a) Find $\hat{x}(t)$ in the Heisenberg picture.
 - (b) Evaluate the expectation value $\langle \hat{x}(t) \rangle$ for $t \geq 0$.
4. A general 3×3 tensor operator T_{ij} ($i, j = x, y, z$) can be decomposed into three parts that are, respectively, proportional to the unit matrix, antisymmetric and symmetric with vanishing trace:

$$T_{ij} = \frac{\text{tr}(T)}{3}\delta_{ij} + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) + \left[\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \frac{\text{tr}(T)}{3}\delta_{ij} \right]$$

- (a) Show that that the first two parts map onto themselves under a general rotation R of space: $T_{ij} \rightarrow \sum_{k,l} R_{ik}R_{jl}T_{kl}$.
- (b) Construct (with the help of the Clebsch-Gordan tables) the spherical tensor operators $T_q^{(k)}$ of rank $k = 0$ and 1 from the cartesian tensor operator $T_{ij} = u_i v_j$. Here \mathbf{u}, \mathbf{v} are ordinary 3-vector operators, transforming like $\mathbf{u} \rightarrow R\mathbf{u}$. (Recall that for spherical vectors $u_{\pm} = \mp(u_x \pm iu_y)/\sqrt{2}$.)
5. (a) Briefly describe the Aharonov-Bohm effect.
 - (b) Show that the vector potential in the cylindrical region $\rho > \rho_a$, where the magnetic field vanishes, can be taken as $\mathbf{A} = \hat{\phi}B\rho_a^2/2\rho$. Here B is the (constant) magnetic field strength for $\rho < \rho_a$ and $\hat{\phi}$ is a unit vector in the azimuthal direction.
 - (c) Show that the vector potential be expressed as a gradient: $\mathbf{A} = \nabla\Lambda$. Find Λ .
 - (d) *Bonus question:* Why can we not eliminate the vector potential altogether with a gauge transformation, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla\Lambda$?

Complete solutions of problems 1 – 4 give 6 points, while that of problem 5 gives 8 points. You may consult the enclosed tables of Clebsch-Gordan coefficients and the expressions for derivatives in cylindrical coordinates.