Tiistaina 18. toukokuuta klo 10-14 salissa D101

1. Joukossa [ensemble] vetyatomeja tilat $|n\ell m\rangle = |100\rangle$, $|211\rangle$ ja $|210\rangle$ esiintyvät todennäköisyyksillä 0.5, 0.25 ja 0.25.
   (a) Lausu joukon tiheysmatriisi tilojen $|n\ell m\rangle$ avulla.
   (b) Laske joukkokeskiarvo operaattoreille $\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{2}}$, L_z ja L_x.

2. (a) Operaattorin $\mathcal{O} = c_1\hat{\boldsymbol{x}} + c_2\hat{\boldsymbol{p}} + c_3\hat{\boldsymbol{L}}$ lausekkeessa $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ ja $\hat{\boldsymbol{L}}$ ovat paikan, impulssin ja impulssimomentin operaattorit, ja c_i ovat kompleksilukuja. Lausu operaattorin $\mathcal{O}$ muuntuminen pariteetti- ja ajankääntömuunnoksissa $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{T}$, ts. anna $\mathcal{P}\mathcal{O}\mathcal{P}^{-1}$ ja $\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{T}^{-1}$.
   (b) Tilat $|\ell m\rangle$ ovat impulssimomentin ominaistiloja, joille $\hat{\boldsymbol{L}}^2|\ell m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell m\rangle$ ja $\hat{L}_z|\ell m\rangle = \hbar m|\ell m\rangle$. Ottaen huomioon operaattorin $\hat{\boldsymbol{L}}$ muuntuminen $\mathcal{P}$- ja $\mathcal{T}$-muunnoksissa, päättele, ovatko tilat $\mathcal{P}|\ell m\rangle$ ja/tai $\mathcal{T}|\ell m\rangle$ operaattorien $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ ja $\hat{L}_z$ ominaistiloja, ja määrää niiden ominaisarvot.
   (c) Onko impulssimomentin kommutaatiosääntö invariantti pariteetti- ja ajankääntömuunnoksissa, ts. onko $\mathcal{O}\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right]\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}\, i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k\,\mathcal{O}^{-1}$, missä nyt $\mathcal{O} = \mathcal{P}$ tai $\mathcal{T}$? Perustele väittämääsi tekemällä muunnokset yhtälön molemmilla puolilla.

3. Laske bosonien sirontamatriisielementti $\langle \mathbf{q_3}, \mathbf{q_4}|V|\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}\rangle$, kun

$$V = \frac{1}{4}\int\prod_{k=1}^{4}\frac{d^3\boldsymbol{p}_k}{(2\pi)^3}\upsilon(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4) : a_{\boldsymbol{p}_1}a_{\boldsymbol{p}_2}a^\dagger_{\boldsymbol{p}_3}a^\dagger_{\boldsymbol{p}_4} :$$

   $\upsilon(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4)$ on symmetrinen argumenttiensa vaihdon suhteen, $|\mathbf{q}\rangle = a^\dagger_{\mathbf{q}}|0\rangle$ ja $\left[a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{p}'}\right] = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')$.

4. Kompleksisen skalaarikentän $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ reaali- ja imaginaariosat ovat toisistaan riippumattomia kenttiä, ja sen lagrangen funktio on $\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$.
   (a) Määrää kenttien ϕ ja ϕ^* liikeyhtälöt, ja anna niiden yleinen ratkaisu.
   (b) Lausu todennäköisyysvirta $j^\mu(x)$ kenttien avulla, ja osoita sen säilyminen $\partial_\mu j^\mu = 0$ liikeyhtälöiden avulla.

5. Vapaa diracin spinori leposysteemissä, $u(\boldsymbol{p} = 0) = \sqrt{2m}(1, 0, 0, 0)^\dagger$, pusketaan spinoriksi $u(\boldsymbol{p}) = S(\Lambda)u(\boldsymbol{p} = 0)$, missä

$$S(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right] \quad \text{esityksessä} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

   Puskun parametrit ovat $\omega_{03} = -\omega_{30} = \zeta$, ja muut $\omega_{\mu\nu} = 0$. Laske $u(\boldsymbol{p})$ ja lausu $\boldsymbol{p}$, φ_s parametrien ζ ja m avulla vertaamalla tulostasi kaavaan

$$u(\boldsymbol{p}, s) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{E + m}}\begin{pmatrix} \varphi_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Muista: $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$, ja $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.

Tuesday 18 May at 10-14 in aud D101

1. In an ensemble of hydrogen atoms the states $|n\ell m\rangle = |100\rangle$, $|211\rangle$ and $|210\rangle$ occur with probabilities 0.5, 0.25 and 0.25, respectively.

   (a) Express the density matrix of the ensemble in terms of the states $|n\ell m\rangle$.

   (b) Find the ensemble averages of the operators $\boldsymbol{L}^{\mathbf{2}}$, L_z and L_x.

2. (a) Consider the operator $\mathcal{O} = c_1\hat{\boldsymbol{x}} + c_2\hat{\boldsymbol{p}} + c_3\hat{\boldsymbol{L}}$, where $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ and $\hat{\boldsymbol{L}}$ are the position, momentum and orbital angular momentum operators, respectively, and the c_i are complex numbers. State the transformation of $\mathcal{O}$ under parity $\mathcal{P}$ and time reversal $\mathcal{T}$, *i.e.*, give $\mathcal{P}\mathcal{O}\mathcal{P}^{-1}$ and $\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{T}^{-1}$.

   (b) Let $|\ell m\rangle$ be angular momentum states satisfying $\hat{\boldsymbol{L}}^2|\ell m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell m\rangle$ and $\hat{L}_z|\ell m\rangle = \hbar m|\ell m\rangle$. From the transformation of $\hat{\boldsymbol{L}}$ under $\mathcal{P}$ and $\mathcal{T}$, determine whether $\mathcal{P}|\ell m\rangle$ and/or $\mathcal{T}|\ell m\rangle$ are eigenstates of $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ and $\hat{L}_z$, and give their eigenvalues.

   (c) Is the commutation rule for angular momentum invariant under parity and/or time reversal, *i.e.*, is $\mathcal{O}\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right]\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}\, i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k\,\mathcal{O}^{-1}$, where now $\mathcal{O} = \mathcal{P}$ or $\mathcal{T}$? Do the transformations on both sides explicitly to prove your statement.

3. Calculate the boson scattering matrix element $\langle \mathbf{q_3}, \mathbf{q_4}|V|\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}\rangle$ when

$$V = \frac{1}{4}\int \prod_{k=1}^{4} \frac{d^3\boldsymbol{p}_k}{(2\pi)^3} v(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4) : a_{\boldsymbol{p}_1} a_{\boldsymbol{p}_2} a^\dagger_{\boldsymbol{p}_3} a^\dagger_{\boldsymbol{p}_4} :$$

   $v(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4)$ is a symmetric function of its arguments and $|\mathbf{q}\rangle = a^\dagger_{\mathbf{q}}|0\rangle$ with $\left[a_{\mathbf{p}}, a^\dagger_{\mathbf{p}'}\right] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$.

4. A complex scalar field $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, whose real and imaginary parts are independent fields, has the lagrangian $\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$.

   (a) Find the equations of motion for ϕ and ϕ^*, and their general solution.

   (b) Express the probability current $j^\mu(x)$ in terms of the fields, and use the equations of motion to verify that it is conserved, $\partial_\mu j^\mu = 0$.

5. A free dirac spinor at rest, $u(\boldsymbol{p} = 0) = \sqrt{2m}(1, 0, 0, 0)^\dagger$, is boosted to $u(\boldsymbol{p}) = S(\Lambda)u(\boldsymbol{p} = 0)$, where

$$S(\Lambda) = \exp\left[-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right] \quad \text{with} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

   The boost parameters are $\omega_{03} = -\omega_{30} = \zeta$, with $\omega_{\mu\nu} = 0$ otherwise. Find $u(\boldsymbol{p})$ and determine $\boldsymbol{p}$, φ_s in terms of ζ and m by comparing your expression with

$$u(\boldsymbol{p}, s) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} \varphi_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Recall: $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$, and $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.