**KVANTTIMEKANIIKKA II** **Tentti** 25.11. 2005

1. (a) Märittele lyhyesti Heisenbergin ja Schrödingerin kuvat, sekä näytä miksi ne ovat ekvivalentit.
   (b) Kirjoita liikeyhtälöt molemmissa kuvissa olettaen, että systeemin potentiaalifunktio on ajasta riippumaton.
   (c) Ratkaise liikeyhtälöt energian ominaistiloille, paikkaoperaattorille $\hat{x}$ ja liikemääräoperaattorille $\hat{p}$ molemmissa kuvissa yksiulotteisen vapaan hiukkasen tapauksessa.
   (d) Laske $[\hat{x}(t), \hat{x}(0)]$ molemmissa kuvissa käyttäen (c) -kohdan tulosta.

2. Selvitä lyhyesti Diracin yhtälö ja sen merkitystä. Erityisesti:
   (a) Näytä, että vapaalle hiukkaselle Diracin yhtälöstä seuraa $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$.
   (b) Anna tulkinta ratkaisuille, joiden energia $E < 0$.
   (c) Löydä vapaan hiukkasen $E > 0$ tasoaaltoratkaisut matriisiesityksessä

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

   (Paulin matriiseja ei tarvitse kirjoittaa auki).

3. (a) Anna tiheysoperaattorin $\rho$ määritelmä ja selvitä lyhyesti sen merkitys.
   (b) Johda tiheysoperaattorin aikariippuvuus Schrödingerin kuvassa.
   (c) Näytä, että puhdas joukko (pure ensemble) hetkellä $t = 0$ ei voi kehittyä sekoittuneeksi joukoksi (mixed ensemble), jos sen aikakehitys on Schrödingerin yhtälön mukainen.

4. Sähkö- ja magneettikentät $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ ovat invariantteja vektoripotentiaalin $\boldsymbol{A}$ (ajasta riippumattomassa) mittamuunnoksessa $\boldsymbol{A} \to \tilde{\boldsymbol{A}} \equiv \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\Lambda(\mathbf{x})$.
   (a) Löydä vaihe $\alpha$ siten, että

$$e^{i\alpha}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A}/c)e^{-i\alpha} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla} - e\tilde{\boldsymbol{A}}/c$$

   (b) Päättele tästä, miten aaltofunktion $\psi(\mathbf{x}, t)$ on muunnuttava mittamuunnoksessa, jotta Schrödingerin yhtälö

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A})^2 + e\phi\right]\psi(\mathbf{x}, t)$$

   pysyisi muodoltaan muuttumattomana mittamuunnoksessa.
   (c) Selitä lyhyesti (ilman kaavoja) Aharonov-Bohm-ilmiön periaate.

5. (a) Anna lyhyesti antiunitaarisen operaattorin (kuten ajankäännös $\Theta$) ominaisuudet.
   (b) Näytä, että mielivaltaisen tilan $|\alpha\rangle$ aaltofunktio $\langle\mathbf{x}|\alpha\rangle$ on aikakäännetyn tilan $\Theta|\alpha\rangle$ aaltofunktion kompleksikonjugaatti, kun $\Theta|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle$.
   (c) Osoita (b)-kohdan perusteella, että Hamiltonin operaattorin $H$ ominaistilan $|n\rangle$ aaltofunktio $\langle\mathbf{x}|n\rangle$ voidaan valita reaaliseksi, jos tila ei ole degeneroitunut ja $\Theta H\Theta^{-1} = H$.
   (d) Todista Kramersin degeneraatio: Ajankäännöksessä invariantin Hamiltonin operaattorin ominaistila on degeneroitunut, jos siinä on pariton lukumäärä fermioneja. *Vihje:* Käytä $\Theta^2|n\rangle = (-1)^{2j}|n\rangle$.