QUANTUM MECHANICS II Spring 2007 **Partial Examination 2/2**

Wednesday 9 May at 9-13 in aud E204

1. (a) Briefly state the properties of an antiunitary operator, such as time reversal $\mathcal{T}$.

   (b) Express the wave function $\psi_T(\boldsymbol{x})$ of the time reversed state $\mathcal{T}|\alpha\rangle$ in terms of the wave function of the state $|\alpha\rangle$, when $\mathcal{T}|\boldsymbol{x}\rangle = |\boldsymbol{x}\rangle$.

   (c) Prove the Kramers degeneracy: An eigenstate of a $\mathcal{T}$-invariant Hamiltonian is degenerate, if it contains an odd number of fermions.

2. (a) Show that density operators satisfy a convexity property, that is, if ρ_1 and ρ_2 are density operators then $\rho = p_1\rho_1 + p_2\rho_2$ is also a density operator, where $p_1 + p_2 = 1$ and $0 \leq p_1, p_2 \leq 1$.

   (b) Show that the eigenvalues λ_j of the density matrix are non-negative, *i.e.*, that $\lambda_j \geq 0$, and hence that $\mathrm{tr}(\rho^2) \leq 1$, with equality only for a pure ensemble.

   (c) Prove that $\mathrm{tr}(\rho^2)$ is time independent, and hence that a pure ensemble at $t = 0$ cannot evolve into a mixed ensemble as long as the time evolution is governed by the Schrödinger equation.

3. Consider the Hamiltonian $H = \,:\exp\left(\lambda \sum_s b_s\right) \exp\left(\lambda \sum_s b_s^\dagger\right):$ where b_s annihilates an electron of spin component $s = \pm$ at rest and $\lambda = \lambda^*$ is a number.

   (a) Show that the Hamiltonian reduces to

   $$H = 1 + \lambda(b_+ + b_- + b_+^\dagger + b_-^\dagger) - \lambda^2(b_+^\dagger b_+ + b_-^\dagger b_- + b_+^\dagger b_- + b_-^\dagger b_+)$$

   (b) Find the state $H|0\rangle$ which arises when the Hamiltonian operates on the empty (vacuum) state.

   (c) Similarly find $H|+\rangle$ and $H|+-\rangle$, where $|+\rangle = b_+^\dagger|0\rangle$ and $|+-\rangle = b_+^\dagger b_-^\dagger|0\rangle$.

4. Consider the Dirac equation in $D = 1 + 1$ (one time + one space) dimensions.

   (a) Write down a general Lorentz transformation $x' = \Lambda x$ explicitly for the time x'^0 and space x'^1 components. How many parameters does Λ have?

   (b) Find a set of 2×2 Dirac matrices γ^μ which satisfy $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ in $D = 1 + 1$.

   (c) Find $S(\Lambda) = \exp(-i\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}/4)$ for a general Lorentz transformation, and establish the relation between $\omega^{\mu\nu}$ and Λ by verifying that $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$.

5. The parity operator $\mathcal{P}$ transforms the electron operator according to $\mathcal{P} b_{\boldsymbol{p},s} \mathcal{P}^{-1} = b_{-\boldsymbol{p},s}$.

   (a) Derive the parity transformation property of the relativistic Dirac field

   $$\Psi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_s \left[b_{\boldsymbol{p},s} u(\boldsymbol{p}, s) e^{-ip\cdot x} + d_{\boldsymbol{p},s}^\dagger v(\boldsymbol{p}, s) e^{ip\cdot x}\right]$$

   (b) Similarly show how the Dirac bilinear $\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\Psi(x)$ transforms under parity.

You may consult the enclosed collection of formulas.

KVANTTIMEKANIIKKA II Kevät 2007 **Välikoe 2/2**

Keskiviikkona 9. toukokuuta klo 9-13 E204

1. (a) Selitä lyhyesti antiunitaarisen operaattorin, kuten ajankäännön $\mathcal{T}$, ominaisuudet.
   (b) Lausu aikakäännetyn tilan $\mathcal{T}|\alpha\rangle$ aaltofunktio $\psi_T(\boldsymbol{x})$ tilan $|\alpha\rangle$ aaltofunktion avulla, kun $\mathcal{T}|\boldsymbol{x}\rangle = |\boldsymbol{x}\rangle$.
   (c) Todista Kramers-degeneraatio: $\mathcal{T}$-invariantin Hamiltonin funktion ominaistilat ovat degeneroituneita, jos tilassa on pariton lukumäärä fermioneja.

2. (a) Näytä, että tiheysoperaattori on kupera, ts., jos ρ_1 ja ρ_2 ovat tiheysoperaattoreita niin myöskin $\rho = p_1\rho_1 + p_2\rho_2$ on tiheysoperaattori, kun $p_1 + p_2 = 1$ ja $0 \leq p_1, p_2 \leq 1$.
   (b) Osoita, että tiheysoperaattorin ominaisarvot λ_j ovat ei-negatiivisia, ts., $\lambda_j \geq 0$, ja että siten $\mathrm{tr}(\rho^2) \leq 1$, missä yhtäsuuruus pätee vain puhtaalle tilalle.
   (c) Todista, että $\mathrm{tr}(\rho^2)$ on ajasta riippumaton, ja että näin ollen tila, joka hetkellä $t = 0$ on puhdas ei voi kehittyä sekatilaksi, kun aikakehitys määräytyy Schrödingerin yhtälöstä.

3. Tarkastele Hamiltonin funktiota $H = :\exp\left(\lambda \sum_s b_s\right) \exp\left(\lambda \sum_s b_s^\dagger\right):$, missä b_s tuhoaa levossa olevan elektronin, jonka spinsuunta on $s = \pm$, ja $\lambda = \lambda^*$ on luku.

   (a) Osoita, että Hamiltonin funktio redusoituu muotoon
   $$H = 1 + \lambda(b_+ + b_- + b_+^\dagger + b_-^\dagger) - \lambda^2(b_+^\dagger b_+ + b_-^\dagger b_- + b_+^\dagger b_- + b_-^\dagger b_+)$$
   (b) Löydä tila $H|0\rangle$, jonka Hamiltonin operaattori luo tyhjöstä (vakuumitilasta).
   (c) Vastaavasti laske $H|+\rangle$ ja $H|+-\rangle$, missä $|+\rangle = b_+^\dagger|0\rangle$ ja $|+-\rangle = b_+^\dagger b_-^\dagger|0\rangle$.

4. Tarkastele Diracin yhtälöä $D = 1 + 1$ ulottuvuudessa (siis yhdessä aika- + yhdessä paikkaulottuvuudessa).

   (a) Kirjoita yleinen Lorentz-muunnos $x' = \Lambda x$ eksplisiittisesti aikakomponentille x'^0 ja paikkakomponentille x'^1. Montako parametria tarvitaan kuvaamaan muunnosta Λ?
   (b) Löydä 2×2 Dirac-matriisit γ^μ joille pätee $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ kun $D = 1 + 1$.
   (c) Lausu $S(\Lambda) = \exp(-i\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}/4)$ yleiselle Lorentz-muunnokselle, ja löydä yhteys $\omega^{\mu\nu}$:n ja Λ:n välille osoittamalla, että $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$.

5. Pariteettimuunnoksen vaikutus elektronin tuhoamisoperaattoriin on: $\mathcal{P} b_{\boldsymbol{p},s} \mathcal{P}^{-1} = b_{-\boldsymbol{p},s}$.

   (a) Näytä, miten relativistinen Dirac-kenttä
   $$\Psi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_s \left[b_{\boldsymbol{p},s} u(\boldsymbol{p}, s) e^{-ip\cdot x} + d_{\boldsymbol{p},s}^\dagger v(\boldsymbol{p}, s) e^{ip\cdot x}\right]$$
   muuntuu pariteettimuunnoksessa.
   (b) Näytä vastaavasti miten Dirac-bilineaari $\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\Psi(x)$ käyttäytyy pariteettimuunnoksessa.

Käytä tarvittaessa hyväksesi oheista kaavakokoelmaa.