1. Tarkastele spin $\frac{1}{2}$ hiukkasen prekessiota Heisenbergin kuvassa. Kirjoita Heisenbergin liikeyhtälöt ajasta riippuville operaattoreille $S_x(t)$, $S_y(t)$ ja $S_z(t)$, kun Hamiltonin funktio on $H = -\frac{eB}{mc}S_z = \omega S_z$. Ratkaise yhtälöt ja lausu $S_{x,y,z}$ ajan funktioina.

2. Olkoon $|k, j; q, m\rangle \equiv \hat{T}_q^{(k)}|j, m\rangle$, missä $\hat{T}_q^{(k)}$ on kertalukua (eli spin) k oleva pallotensorioperaatori.

   (a) Ilmaise kierretty tila $\mathcal{D}(R)|k, j; q, m\rangle$ tilojen $|k', j'; q', m'\rangle$ superpositiona. Anna kertoimet eksplisiittisesti kiertomatriisielementtien avulla.

   (b) Anna eksplisiittinen tulos kierrolle $\mathcal{D}(0, \frac{1}{2}\pi, 0)\hat{z}|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, eli 90°:n kierrolle y-akselin ympäri. Tässä $\hat{z}$ on paikkaoperaattorin $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ kolmas komponentti.

   (c) Millä j:n ja m:n arvoilla matriisielementit $\langle j, m|\hat{z}|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ voivat olla nollasta eroavia?

3. (a) Operaattorin $\mathcal{O} = c_1\hat{\boldsymbol{x}} + c_2\hat{\boldsymbol{p}} + c_3\hat{\boldsymbol{L}}$ lausekkeessa $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$ ja $\hat{\boldsymbol{L}}$ ovat paikan, impulssin ja impulssimomentin operaattorit, ja c_i ovat kompleksilukuja. Lausu operaattorin $\mathcal{O}$ muuntuminen pariteetti- ja ajankääntömuunnoksissa $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{T}$, ts. anna $\mathcal{P}\mathcal{O}\mathcal{P}^{-1}$ ja $\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{T}^{-1}$.

   (b) Tilat $|\ell m\rangle$ ovat impulssimomentin ominaistiloja, joille $\hat{\boldsymbol{L}}^2|\ell m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell m\rangle$ ja $\hat{L}_z|\ell m\rangle = \hbar m|\ell m\rangle$. Ottaen huomioon operaattorin $\hat{\boldsymbol{L}}$ muuntuminen $\mathcal{P}$- ja $\mathcal{T}$-muunnoksissa, päättele, ovatko tilat $\mathcal{P}|\ell m\rangle$ ja/tai $\mathcal{T}|\ell m\rangle$ operaattorien $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ ja $\hat{L}_z$ ominaistiloja, ja määrää niiden ominaisarvot.

   (c) Onko impulssimomentin kommutaatiosääntö invariantti pariteetti- ja ajankääntömuunnoksissa, ts. onko $\mathcal{O}\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right]\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}\, i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k\,\mathcal{O}^{-1}$, missä nyt $\mathcal{O} = \mathcal{P}$ tai $\mathcal{T}$? Perustele väittämääsi tekemällä muunnokset yhtälön molemmilla puolilla.

4. Näytä, että Diracin yhtälö Coulomb-potentiaalissa $V(x)$,

$$\left(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \gamma^0 V(x) - m\right)\psi(x) = 0$$

   pelkistyy Schrödingerin yhtälöksi ei-relativistisella rajalla.
   Vihje: Erota tärkein aikariippuvuus kirjoittamalla $\psi(x) = e^{-imt}\phi(t, \mathbf{x})$ ja kerro yhtälö operaattorilla $\left(i\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \gamma^0 V(x) + m\right)$. Ei-relativistisella rajalla $\frac{\partial\phi(x)}{\partial t} \ll m\phi(x)$ ja $\frac{\partial V(x)}{\partial x^\mu} \ll m$.

5. Kompleksisen skalaarikentän $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ reaali- ja imaginaariosat ovat toisistaan riippumattomia kenttiä, ja sen lagrangen funktio on $\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$.

   (a) Määrää kenttien ϕ ja ϕ^* liikeyhtälöt, ja anna niiden yleinen ratkaisu.

   (b) Lausu (hermiittinen) todennäköisyysvirta $j^\mu(x)$ kenttien avulla, ja osoita sen säilyminen $\partial_\mu j^\mu = 0$ liikeyhtälöiden avulla.

Kaavakokoelma eri paperilla.